IZBORNO NATJECANJE ZA IMC - RJEŠENJA

03. 06. 2016.

Zadatak 1. Neka je $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ funkcija klase C^1 takva da je $f(0) = 0$. Dokažite da je

$$\int_0^1 f(x)^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_0^1 f'(x)^2 \,\mathrm{d}x.$$

Rješenje. Računamo

$$\int_0^1 f(x)^2 \,\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_0^x f'(y) \,\mathrm{d}y\right)^2 \mathrm{d}x \leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |f'(y)| \,\mathrm{d}y\right)^2 \mathrm{d}x = \left(\int_0^1 |f'(x)| \,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_0^1 f'(x)^2 \,\mathrm{d}x,$$

gdje smo u prvoj jednakosti koristili $f(0) = 0$, a zadnja nejednakost je Cauchy - Schwarz. ✓

Zadatak 2. Neka je A $n \times n$ simetrična matrica s cjelobrojnim koeficijentima te neka je p polinom čije su sve nultočke cijeli brojevi takav da je $p(A) = J$, gdje je J $n \times n$ matrica čiji su svi koeficijenti jednaki 1. Ako je $(1, 1, \ldots, 1)$ svojstveni vektor matrice A, dokažite da su sve svojstvene vrijednosti matrice A cijeli brojevi.

Rješenje. Neka je $v = (1, 1, \ldots, 1)$ te neka je λ pripadajuća svojstvena vrijednost, kako je $Av = \lambda v$ i A ima cjelobrojne koeficijente, odmah vidimo da je $\lambda \in \mathbb{Z}$. Neka je $\mu \neq \lambda$ svojstvena vrijednost matrice A te neka je $u \neq 0$ pripadajući svojstveni vektor. Kako je A simetrična matrica, znamo da je $v \cdot u = 0$ (svojstveni potprostori su međusobno ortogonalni). Sada je

$$p(\mu)u = p(A)u = Ju = 0,$$

kako je $u \neq 0$, zaključujemo da je $p(\mu) = 0$, odnosno, μ je nultočka od p pa je $\mu \in \mathbb{Z}$. ✓

Zadatak 3. Odredite sve prirodne brojeve n takve da za svaku permutaciju skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$, σ, postoji polinom f s cjelobrojnim koeficijentima, takav da je

$$\sigma(x) \equiv f(x) \pmod{n}, \quad \forall x \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Rješenje. $n \in \mathbb{P} \cup \{1\}$, gdje je $\mathbb{P}$ skup prostih brojeva.

- $n = 1$ je očito dobar, uzmemo npr. nul polinom.
- $n = p \in \mathbb{P}$, tvrdimo da možemo naći polinom oblika $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{p-1}x^{p-1}$. Sada zapravo moramo dokazati da postoji rješenje sustava kongruencija

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2^2 & \cdots & 2^{p-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & p & p^2 & \cdots & p^{p-1} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{p-1} \end{bmatrix}}_{a} \equiv \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma(1) \\ \sigma(2) \\ \vdots \\ \sigma(p) \end{bmatrix}}_{b} \pmod{p}.$$

  Pogledamo li matricu A i vektor b modulo p vidimo da je dovoljno dokazati da sustav $Aa = b$ ima rješenje u polju $\mathbb{Z}_p$, a to je očito jer je matrica A zapravo Vandermondeova matrica, koja je regularna. Dakle, svaki $n \in \mathbb{P}$ je dobar.

- $n \in \mathbb{N} \setminus (\mathbb{P} \cup \{1\})$. Kako je n složen, postoji prost broj $1 < p < n$ takav da $p \mid n$. Neka je σ permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$ takva da je $\sigma(n) = n$ i $\sigma(p) = 1$ te neka je f proizvoljan polinom s cjelobrojnim koeficijentima. Želimo da vrijedi

$$f(n) \equiv \sigma(n) = n \equiv 0 \pmod{n} \qquad \text{i} \qquad f(p) \equiv \sigma(p) = 1 \pmod{n}.$$

  Sada primijetimo da je $f(n) \equiv f(0) \pmod{p}$ i $f(p) \equiv f(0) \pmod{p}$ pa iz prvog zahtjeva dobijemo da je $f(0) \equiv 0 \pmod{p}$, a iz drugog da je $f(0) \equiv 1 \pmod{p}$, što je nemoguće. Dakle, niti jedan složen prirodan broj n nije dobar. ✓

Zadatak 4.

(a) Ako je $(a_n)_{n=1}^\infty$ niz nenegativnih brojeva takav da red $\sum_{n=1}^\infty a_n^{4/3}$ konvergira, dokažite da red $\sum_{n=1}^\infty \Big(\sum_{m=1}^\infty a_{m+n} a_m \Big)^2$ također konvergira.

(b) Pokažite da postoji niz nenegativnih brojeva $(a_n)_{n=1}^\infty$ takav da za svaki $p > 4/3$ red $\sum_{n=1}^\infty a_n^p$ konvergira, ali red $\sum_{n=1}^\infty \Big(\sum_{m=1}^\infty a_{m+n} a_m \Big)^2$ divergira.

Rješenje. (a) Dovoljno je dokazati da za svaki niz nenegativnih brojeva $(b_n)_{n=1}^\infty$ vrijedi

$$\sum_{n=1}^\infty \Big(\sum_{m=1}^\infty a_{m+n} a_m \Big) b_n \leq \Big(\sum_{n=1}^\infty a_n^{4/3} \Big)^{3/2} \Big(\sum_{n=1}^\infty b_n^2 \Big)^{1/2}.$$

Naime, za svaki $N \in \mathbb{N}$ će uz odabir

$$b_n := \begin{cases} \sum_{m=1}^\infty a_{m+n} a_m < \infty & \text{ako je } 1 \leq n \leq N \\ 0 & \text{ako je } n > N \end{cases}$$

iz gornje nejednakosti slijediti

$$\sum_{n=1}^N \Big(\sum_{m=1}^\infty a_{m+n} a_m \Big)^2 \leq \Big(\sum_{n=1}^\infty a_n^{4/3} \Big)^{3/2} \Bigg(\sum_{n=1}^N \Big(\sum_{m=1}^\infty a_{m+n} a_m \Big)^2 \Bigg)^{1/2}$$

pa dijeljenjem s drugim faktorom na desnoj strani i kvadriranjem dobivamo ograničenost parcijalnih suma željenog reda i to štoviše brojem $\Big(\sum_{n=1}^\infty a_n^{4/3} \Big)^3 < \infty$.

Proširimo nizove tako da stavimo $a_n = 0$ i $b_n = 0$ za $n \leq 0$. Označimo $A := \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n^{4/3}$, $B := \sum_{n \in \mathbb{Z}} b_n^2$. U dokazu gornje nejednakosti koristimo Hölderovu nejednakost za dvostruke sume trostrukih produkata:

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=1}^\infty a_{m+n} a_m b_n &= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \Big(a_{m+n}^{2/3} a_m^{2/3} \Big) \Big(a_m^{1/3} b_n^{1/2} \Big) \Big(b_n^{1/2} a_{m+n}^{1/3} \Big) \\ &\leq \Big(\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} a_{m+n}^{4/3} a_m^{4/3} \Big)^{1/2} \Big(\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} a_m^{4/3} b_n^2 \Big)^{1/4} \Big(\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} b_n^2 a_{m+n}^{4/3} \Big)^{1/4} \\ &= \Big(\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} a_n^{4/3} a_m^{4/3} \Big)^{1/2} \Big(\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} a_m^{4/3} b_n^2 \Big)^{1/4} \Big(\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} b_n^2 a_m^{4/3} \Big)^{1/4} \\ &= (A^2)^{1/2} (AB)^{1/4} (BA)^{1/4} = A^{3/2} B^{1/2}, \end{aligned}$$

što je i trebalo pokazati.

(b) Stavimo $a_n := n^{-3/4}$. S jedne strane je

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3p/4}},$$

a taj red konvergira čim je $3p/4 > 1$, tj. $p > 4/3$. S druge pak strane, za $N \in \mathbb{N}$ imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} \Big(\sum_{m=1}^{\infty} a_{m+n} a_m \Big)^2 &\geq \sum_{n=1}^{N} \Big(\sum_{m=n}^{\infty} \frac{1}{(m+n)^{3/4} m^{3/4}} \Big)^2 \\
&\geq \sum_{n=1}^{N} \Big(\int_{n}^{2n} \frac{dx}{(x+n)^{3/4} x^{3/4}} \Big)^2 \\
&\Big[y = x/n \Big] \\
&= \sum_{n=1}^{N} \Big(\int_{1}^{2} \frac{n dy}{n^{3/4} (y+1)^{3/4} n^{3/4} y^{3/4}} \Big)^2 \\
&= \Big(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \Big) \Big(\int_{1}^{2} \frac{dy}{(y+1)^{3/4} y^{3/4}} \Big)^2,
\end{aligned}$$

što doista ide u ∞ kada $N \to \infty$ zbog divergencije harmonijskog reda.

Napomene. Zapravo za kompleksne dvostrane nizove koji poprimaju konačno mnogo ne-nul vrijednosti imamo

$$\begin{aligned}
\sum_{n \in \mathbb{Z}} \Big| \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{m+n} \overline{a_m} \Big|^2 &= \sum_{m_1, m_2, n \in \mathbb{Z}} a_{m_1+n} \overline{a_{m_1} a_{m_2+n}} a_{m_2} \\
&\begin{bmatrix} m_3 = m_1 + n \\ m_4 = m_2 + n \end{bmatrix} \\
&= \sum_{\substack{m_1, m_2, m_3, m_4 \in \mathbb{Z} \\ m_1 + m_4 = m_2 + m_3}} \overline{a_{m_1}} a_{m_2} a_{m_3} \overline{a_{m_4}} \\
&= \sum_{m_1, m_2, m_3, m_4 \in \mathbb{Z}} \overline{a_{m_1}} a_{m_2} a_{m_3} \overline{a_{m_4}} \int_0^1 e^{2\pi i (-m_1 + m_2 + m_3 - m_4) t} dt \\
&= \int_0^1 \Big| \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m e^{2\pi i m t} \Big|^4 dt
\end{aligned}$$

pa tvrdnja (a) dijela zadatka slijedi iz poznate *Hausdorff-Youngove nejednakosti*

$$\Big(\int_0^1 \Big| \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{2\pi i n t} \Big|^q dt \Big)^{1/q} \leq \Big(\sum_{n \in \mathbb{Z}} |a_n|^p \Big)^{1/p},$$

koja vrijedi za $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$ takve da je $1/p + 1/q = 1$, a nama treba poseban slučaj $p = 4/3$, $q = 4$.

Još jedna mogućnost za (a) dio zadatka je označiti $b_n := a_{-n}$ pa definirati $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ kao konvoluciju nizova $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ i $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$,

$$c_n := \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m b_{n-m},$$

tako da je $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \Big|\sum_{m\in\mathbb{Z}} a_{m+n}a_m\Big|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_{-n}|^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^2$. Sada tvrdnja slijedi iz *Youngove nejednakosti za konvoluciju*:

$$\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^r\Big)^{1/r} \le \Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^p\Big)^{1/p}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |b_n|^q\Big)^{1/q},$$

koja vrijedi za eksponente $1 < p, q, r < \infty$ takve da je $1/p + 1/q = 1 + 1/r$, a mi odaberemo $p = q = 4/3$, $r = 2$.

Zadatak 5. Dana je $10 \times 10 \times 10$ kocka sastavljena od 1000 jediničnih bijelih kockica. Bobi i Rudi igraju sljedeću igru. Bobi izabere nekoliko kvadara veličine $1 \times 1 \times 10$ tako da nikoja dva nemaju zajedničke točke i promjeni boju svih kockica u njima u crnu. Tada Rudi izabere neke od jediničnih kockica i pita Bobija koje su boje. Koliko najmanje kockica Rudi mora izabrati da bi na temelju Bobijevog odgovora odredio sve crne kockice?

Rješenje. Rudi mora odabrati barem 150 jediničnih kockica. Kockice koje je Rudi izabrao ćemo zvati *bitnima*. Kada napišemo *kvadar* mislimo na kvadar tipa $1 \times 1 \times 10$.

- Mora biti barem 150 bitnih kockica.
  Promatrajmo neku bitnu kockicu. Ona leži na tri kvadra, pretpostavimo da je na neka dva od ta tri kvadra ona jedina bitna kockica. Ukoliko Bobi veliku kocku oboja tako da oboja samo jedan od ta dva kvadra (i ništa više), Rudi ne može nikako znati koji od njih je obojan, jer na njima postoji samo jedna bitna kockica koja je na njihovom presjeku.

  Ono što sada zaključujemo je: za svaku bitnu kockicu na barem 2 od njena tri kvadra (ona tri na kojima ona leži) mora postojati još po barem jedna bitna kockica.

  Dakle, pretpostavimo li da za svaku bitnu kockicu na jednom od njenih kvadara nema dodatne bitne kockice, a na preostala dva je još točno po jedna, onda možemo izbrojati koliko nam je minimalo bitnih kockica potrebno. Jasno je da na svakom kvadru mora biti barem jedna bitna kockica, označimo broj bitnih kockica s N.

  Svaka bitna kockica pogađa 3 kvadra, koliko kvadara će biti pogođeno 2 puta? Svaka bitna kockica će pogoditi točno dva kvadra koji su već pogođeni, ali njihovo duplo pogađanje ćemo brojati i kod svake od tih drugih bitnih kockica, stoga će broj duplo pogođenih kvadara biti jednak N.

  Imamo da je $3N - N = 300$, odnosno $N = 150$, tj. potrebno nam je barem 150 bitnih kockica.

- 150 bitnih kockica je dovoljno.
  Bira bitne kockice razinu po razinu, ovako izgledaju prve dvije:

$$\begin{array}{cccccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * & * \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * & * & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * & * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & * & * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
* & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
* & * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccccccccc}
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * & * \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * & * & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * & * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & * & * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
* & * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & * & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}.$$

  Na razinama $3-4, 5-6, 7-8, 9-10$ bira isto, s time da, na svakom idućem paru translatira ciklički odabir za 2 kockice udesno. Primijetimo da su na ovaj način svi kvadri pogođeni i da svaka bitna kockica ima točno 2 susjedne. Time smo gotovi.