IZBORNO NATJECANJE ZA IMC - RJEŠENJA

11. 06. 2015.

Zadatak 1. Odredite sve prirodne brojeve n za koje postoji realna, antisimetrična i regularna $n \times n$ matrica.

Rješenje. Ako je n neparan prirodan broj, onda iz

$$\det A = \det A^t = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A,$$

slijedi da je $\det A = 0$, tj. A ne može biti regularna pa za neparne n ne postoji takva matrica. Za paran n ćemo indukcijom pokazati da su antisimetrične matrice oblika

$$A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 0 \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{i,j=1}^n, \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, & j = i+1, \\ -1, & j = i-1, \\ 0, & \text{inače}, \end{cases}$$

regularne. Naime, vidimo da je $\det A_2 = 1$, a za paran $n \in \mathbb{N}$, Laplaceovim razvojem najprije po prvom retku, a zatim iz novodobivene matrice po prvom stupcu vidimo da je

$$\det A_{n+2} = (-1) \cdot 1 \cdot (-1) \cdot \det A_n = \det A_n = \ldots = \det A_2 = 1.$$

Dakle, za svaki paran prirodan broj n postoji takva matrica. ✓

Zadatak 2. Odredite najmanji prirodni broj n sa svojstvom: *Ako su x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 realni brojevi takvi da postoji n različitih odabira cijelih brojeva $1 \leq p < q < r \leq 5$ takvih da je $x_p + x_q + x_r = 0$, onda je $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x_5 = 0$.*

Rješenje. Primijetimo da za $n = 6$ možemo staviti $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ i $x_5 = -2$ te da postoji $\binom{4}{2} = 6$ različitih odabira cijelih brojeva $1 \leq p < q \leq 4$ takvih da je $x_p + x_q + x_5 = 0$. Dakle, svakako je $n \geq 7$. Pokažimo da je najmanji n jednak upravo 7. Ono što sada zapravo moramo pokazati je da svaka matrica 7×5 čiji su retci međusobno različiti te svaki redak ima 3 elementa jednaka 1 i dva jednaka 0, ima rang jednak 5. Označimo takvu matricu s A. Zbroj elemenata matrice A je jednak 21, ima 5 stupaca iz čega vidimo da postoji stupac koji ima barem 5 jedinica. Također, kako je $\binom{4}{2} = 6$ vidimo da niti jedan stupac ne može sadržavati 7 jedinica. Dakle, imamo dva slučaja, ili stupac s najviše jedinica ima 6 jedinica ili ih ima 5. Ukoliko ih ima 6, zamjenama redaka i stupaca možemo matricu A svesti na

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

a ovo vidimo da je ranga 5. U preostalom slučaju, kada je najveći broj jedinica u jednom stupcu jednak 5, onda matricu A možemo zamjenom redaka i stupaca svesti na jednu od ove dvije matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & * & * & * \\ 1 & 1 & * & * & * \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & * & * & * \\ 1 & 0 & * & * & * \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

gdje $*$ predstavlja elemente koje ne znamo točno odrediti, ali koji su svakako nebitni. Ono što je bitno je da je u obje matrice donji 5×5 blok punog ranga, tj. vidimo da matrica A u svakom slučaju ima rang jednak 5, a to smo i trebali dokazati. ✓

Zadatak 3. Neka je $z \in \mathbb{C}$ takav da je $|z-1| \leq \frac{1}{2}$. Dokažite da je $|\ln z| \leq 2|z-1|$.

Rješenje. Znamo da za $z \in \mathbb{C}$ takav da je $|z-1| < 1$ vrijedi da je $\ln z = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(z-1)^n}{n}$. Dokažimo sada općenitiju tvrdnju:

$$\text{ako je } a \in \langle 0,\ 1\rangle \text{ takav da je } |z-1| \leq a, \text{ onda je } |\ln z| \leq \frac{-\ln(1-a)}{a}|z-1|.$$

Računamo:

$$\begin{aligned} |\ln z| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z-1|^n}{n} = |z-1| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z-1|^{n-1}}{n} \\ &\leq |z-1| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{n} = \frac{-1}{a} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-a)^n}{n} \right) |z-1| \\ &= \frac{-\ln(1-a)}{a} |z-1|. \end{aligned}$$

Sada nam je dovoljno dokazati da za $a \in \left\langle 0,\ \frac{1}{2} \right]$ vrijedi da je

$$\frac{-\ln(1-a)}{a} \leq 2 \iff \ln \frac{1}{1-a} \leq 2a \iff \frac{1}{1-a} \leq e^{2a} \iff e^{2a}(1-a) \geq 1.$$

Definirajmo funkciju $f : \left[0,\ \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$, $f(t) = e^{2t}(1-t)$, vidimo da je $f'(t) = e^{2t}(1-2t) \geq 0$, za sve $t \in \left\langle 0,\ \frac{1}{2} \right\rangle$. Dakle, $f(a) \geq f(0) = 1$. ✓

Zadatak 4. Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}.$$

Rješenje. Ključna ideja je koristiti diskretni analogon parcijalne integracije:

Lema. Neka su $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ nizovi. Tada je

$$\sum_{n=1}^{N} a_n b_n + \sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{m=1}^{n} a_m\right)(b_{n+1}-b_n) = \left(\sum_{n=1}^{N} a_n\right) b_{N+1}$$

Dokaz leme. Uočimo da je

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\left(\sum_{m=1}^{n} a_m\right)(b_{n+1}-b_n) &= \sum_{m=1}^{N}\sum_{n=m}^{N} a_m(b_{n+1}-b_n)\\ &= \sum_{m=1}^{N} a_m \sum_{n=m}^{N}(b_{n+1}-b_n)\\ &= \sum_{m=1}^{N} a_m(b_{N+1}-b_m).\end{aligned}$$

■

Lako je za vidjeti da je niz $\left(\sum_{n=1}^{N}\sin n\right)_{N\in\mathbb{N}}$ ograničen. Doista,

$$\left|\sum_{n=1}^{N}\sin n\right| = \left|\sum_{n=1}^{N}\operatorname{Im} e^{in}\right| = \left|\operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{N} e^{in}\right)\right| \le \left|\sum_{n=1}^{N} e^{in}\right| = \left|\frac{e^{iN}-1}{e^{i}-1}\right| \le \frac{2}{|e^{i}-1|}.$$

Označimo posljednju konstantu sa C i uočimo da je

$$\sum_{n=1}^{N}\left|\sum_{m=1}^{n}\sin m\right|\cdot\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right| \le C\cdot\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n(n+1)} \le C\cdot\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^2} < \infty,$$

te

$$\left|\left(\sum_{n=1}^{N}\sin n\right)\frac{1}{N+1}\right| \le \frac{C}{N+1}.$$

Sada koristimo lemu uz $a_n = \sin n$ i $b_n = \frac{1}{n}$. Iz prethodnog komentara zaključujemo da drugi sumand iz iskaza leme konvergira apsolutno, te da izraz na desnoj strani konvergira prema 0 pa zaključujemo da i traženi red konvergira. ✓

Zadatak 5. Dokažite da za svaki prost broj p postoji beskonačno mnogo četvorki međusobno različitih prirodnih brojeva (x, y, z, t) takvih da je

$$(x^2+pt^2)(y^2+pt^2)(z^2+pt^2)$$

potpun kvadrat.

Rješenje. Najprije, znamo da jednadžba $x^2-py^2=1$ ima beskonačno mnogo rješenja u skupu prirodnih brojeva (to je Pellova jednadžba). Dakle, za svaki prost broj p postoji beskonačno mnogo prirodnih brojeva $s>3$ i t takvih da je $s^2-1=pt^2$. Stavimo da je

$$x = s^2-1, \qquad y = s+1, \qquad z = s-1,$$

tada je

$$\begin{aligned}(x^2+pt^2)(y^2+pt^2)(z^2+pt^2) &= (s^4-s^2)(2s^2+2s)(2s^2-2s)\\ &= (2s^2(s^2-1))^2.\end{aligned}$$

Očito je $y>z$, a kako je $s>3$ vidimo da je i $x>y$. Dakle, preostaje pokazati da je $x\neq t$, $y\neq t$ i $z\neq t$. Najprije imamo da je $x=s^2-1=pt^2>t$, tj. $x\neq t$.

- $t = y = s + 1$, tada je $(s-1)(s+1) = s^2 - 1 = pt^2 = p(s+1)^2$, iz čega slijedi da je $s - 1 = p(s+1) > s - 1$, što je kontradikcija.
- $t = z = s - 1$, tada je $(s-1)(s+1) = s^2 - 1 = pt^2 = p(s-1)^2$, iz čega slijedi da je $s + 1 = p(s-1) \geq 2(s-1) = s + (s-2) > s + 1$, što je opet kontradikcija.

Dakle, pokazali smo da ne može biti $x = t$ ili $y = t$ ili $z = t$. ✓