IZBORNO NATJECANJE ZA IMC - RJEŠENJA

24. svibnja 2013.

Zadatak 1. Konvergira li niz $\left(\cos^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)\right)_{n\geq 0}$? Ako konvergira, nađite mu limes, u suprotnom dokažite da ne konvergira.

Rješenje.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\cos^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right) &= \lim_{n\to\infty}\cos^2\left(\pi\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)+\pi n\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\cos^2\left(\pi\left(\sqrt{n^2+n}-n\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\cos^2\left(\pi\cdot\frac{n^2+n-n^2}{\sqrt{n^2+n}+n}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\cos^2\left(\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}\right)\\
&= \cos^2\frac{\pi}{2}\\
&= 0,
\end{aligned}$$

pri čemu drugi redak slijedi zbog činjenice da je $\cos^2$ periodična funkcija s periodom π. ✓

Zadatak 2. Neka je n prirodan broj i $a_{1,1}=1$, $a_{1,j}=j$, $a_{i,1}=i$ te $a_{i,j}=a_{i-1,j-1}+ij$, za sve $i,\,j\in\{2,\,3\ldots,\,n\}$. Neka je $f:\mathbb{Z}^n\to\mathbb{Z}^n$ funkcija zadana s

$$f\left(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n\right)=\left(\sum_{j=1}^n a_{1,j}x_j,\,\sum_{j=1}^n a_{2,j}x_j,\,\ldots,\,\sum_{j=1}^n a_{n,j}x_j\right).$$

Dokažite da je f bijekcija.

Rješenje. Neka je $A_n=\left(a_{i,j}\right)_{i,\,j\in\{1,\,2,\,\ldots,\,n\}}$. Vidimo da je funkcija f zapravo djelovanje matrice A_n na vektore iz $\mathbb{Z}^n$. Dokažimo indukcijom po $n\in\mathbb{N}$ da je $\det A_n=1$. Očito je $\det A_1=1$, jer je $A_1=(1)$, pokazat ćemo da je $\det A_{n+1}=\det A_n$, za svaki $n\in\mathbb{N}$ i time smo gotovi. U matrici A_{n+1} od i-tog retka oduzmimo prvi redak pomnožen s i, za $i=2,\,\ldots,\,n+1$, zatim označimo s B matricu koju dobijemo izbacivanjem prvog retka i prvog stupca. Jasno je da je $\det A_{n+1}=\det B$. Označimo sa $b_{i,j}$ $(i,\,j\in\{1,\,2,\,\ldots,\,n\})$ koeficijente matrice B. Znamo da je $b_{i,j}=a_{i+1,j+1}-(i+1)(j+1)$, iz čega vidimo da su $b_{i,j}$ upravo koeficijenti matrice A_n. Dakle, $\det A_{n+1}=\det A_n$, odnosno, $\det A_n=1$, za svaki $n\in\mathbb{N}$. Ovime smo pokazali da je A_n invertibilna matrica, odnosno da je f injekcija. Nadalje, matrica A_n ima cjelobrojne koeficijente, a kako je $\det A_n=1$ zaključujemo da i matrica A_n^{-1} ima cjelobrojne koeficijente. Naime, vrijedi da je $A_n^{-1}=\frac{1}{\det A_n}\cdot\tilde{A}_n$, gdje je $\tilde{A}_n$ adjunkta matrice A_n, a ona ima cjelobrojne koeficijente jer su oni jednaki determinantama podmatrica matrice A_n. No, to znači da funkcija f pogađa svaki element iz $\mathbb{Z}^n$. Konačno, f je injekcija i surjekcija, tj. f je bijekcija. ✓

Zadatak 3. Odredite sve funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ koje su 2013 puta derivabilne i koje zadovoljavaju jednakost

$$\sum_{\substack{I\subseteq\mathbb{N}_{2013}\\|I|\text{ neparan}}} f\left(\sum_{i\in I}x_i\right)=\sum_{\substack{\emptyset\neq J\subseteq\mathbb{N}_{2013}\\|J|\text{ paran}}} f\left(\sum_{j\in J}x_j\right),$$

za sve realne brojeve $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{2013}$.
*(**Napomena.** $\mathbb{N}_{2013}$ je oznaka za skup $\{1,\, 2,\, \ldots,\, 2013\}$, a $|I|$ je oznaka za kardinalitet skupa I.)*

Rješenje. U danu jednakost uvrstimo $x_1 = x_2 = \ldots = x_{2013} = 0$, dobivamo da je

$$\sum_{n=1}^{1007} \binom{2013}{2n-1} f(0) = \sum_{m=1}^{1006} \binom{2013}{2m} f(0).$$

Primijetimo da je, za $n = 1,\, 2,\, \ldots,\, 1006$, $\binom{2013}{2n-1} = \binom{2013}{2\cdot(1007-n)}$, iz čega zaključujemo da je $f(0) = 0$. Nadalje, derivirajmo obje strane dane jednakosti redom po varijablama $x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{2013}$. Vidimo da će u tom procesu "preživjeti" jedino član koji ovisi o svim varijablama, a to je jedino $f(x_1 + x_2 + \ldots + x_{2013})$. Dakle, zaključujemo da je

$$f^{(2013)}(x_1 + x_2 + \ldots + x_{2013}) = 0,\ \forall x_1,\, x_2,\, \ldots,\, x_{2013} \in \mathbb{R}.$$

Uvrstimo $x_2 = x_3 = \ldots = x_{2013} = 0$ te $x_1 = x$ iz čega vidimo da je $f^{(2013)}(x) = 0$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dobili smo da je f nužno polinom stupnja najviše 2012 za kojeg vrijedi $f(0) = 0$, tj. f je oblika

$$f(x) = a_{2012}x^{2012} + a_{2011}x^{2011} + \ldots + a_1 x,\ \forall x \in \mathbb{R},$$

gdje su $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_{2012}$ realni brojevi. Pokažimo da sve takve funkcije zadovoljavaju danu jednakost. Jasno je da ako su funkcije f i g rješenje da su onda rješenje i funkcije $f + g$ te cf, gdje je c proizvoljna realna konstanta. Dakle, dovoljno je (a i nužno) pokazati da svaka od funkcija $x \mapsto x^k$ zadovoljava dani uvjet, gdje je $k \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, 2012\}$. Fiksirajmo k i primijetimo da će se i s lijeve i s desne strane dane jednakosti nalaziti samo sumandi oblika $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_{2013}^{k_{2013}}$, gdje su $k_1,\, k_2,\, \ldots,\, k_{2013}$ nenegativni cijeli brojevi takvi da je $k_1 + k_2 + \ldots + k_{2013} = k$. Kako je $k < 2013$, postoji $t \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, 2013\}$ takav da je $k_t = 0$. Promotrimo sada danu jednakost, za svaki njen član vrijedi da ako se $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_{2013}^{k_{2013}}$ javlja u njemu da se onda javlja točno $\binom{k}{k_1,\, k_2,\, \ldots,\, k_{2013}}$ puta $\left(\text{multinomni teorem, } \binom{k}{k_1,\, k_2,\, \ldots,\, k_{2013}} = \frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_{2013}!}\right)$. No, dodamo li na desnu stranu $f(0)$ (što je jednako 0) vidimo da možemo uspostaviti bijekciju između članova na lijevoj i desnoj strani takvu da će se $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_{2013}^{k_{2013}}$ javljati u članu s jedne strane ako i samo ako se javlja u njemu pridruženom članu s druge strane. To napravimo tako da svakom članu s lijeve strane u kojemu se javlja x_t pridružimo član s desne strane u kojemu se ne javlja, specijalno, članu $f(x_t)$ pridružujemo $f(0)$ te svakom članu s lijeve strane u kojemu se ne javlja x_t pridružimo član s desne strane u kojemu se javlja. Komentirajmo još da (ne)sadržavanje člana x_t ne utječe na to hoće li se ili ne $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_{2013}^{k_{2013}}$ pojaviti u raspisu, zato što je $k_t = 0$. Dakle, tražene funkcije su svi (i samo oni) polinomi f s realnim koeficijentima stupnja najviše 2012 za koje je $f(0) = 0$. ✓

Zadatak 4. *Visina* prirodnog broja a se definira kao broj $\frac{s(a)}{a}$, gdje je $s(a)$ suma svih prirodnih djelitelja broja a. Pokažite da, za svaki par prirodnih brojeva $(N,\, k)$, postoji prirodan broj b, takav da je visina svakog od brojeva $b,\, b+1,\, \ldots,\, b+k$ veća od N.

Rješenje. Znamo da je $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} = +\infty$, pri čemu su $p_1,\, p_2,\, \ldots$ svi prosti prirodni brojevi. To znači da za sve prirodne brojeve N i k možemo naći prirodne brojeve $1 = n_0 < n_1 < \ldots < n_{k+1}$ takve da je $\sum\limits_{i=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{1}{p_i} > N - 1$, za sve $j \in \{0,\, 1,\, \ldots,\, k\}$. Nadalje, prema kineskom teoremu o ostacima znamo da sustav kongruencija

$$b \equiv -j \pmod{\prod_{i=n_j}^{n_{j+1}-1} p_i}, \quad j = 0,\, 1,\, \ldots,\, k,$$

ima rješenje u skupu prirodnih brojeva. Uzmimo takav $b \in \mathbb{N}$, sada vidimo da vrijedi da $\prod_{i=n_j}^{n_{j+1}-1} p_i \mid b+j$, odnosno $\frac{s(b+j)}{b+j} \geq 1 + \sum_{i=n_j}^{n_{j+1}-1} \frac{1}{p_i} > N$, za sve $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$. ✓

Zadatak 5. Neka je G konačno generirana grupa takva da za svaki $g \in G, g \neq e_G$ postoji konačna grupa K i homomorfizam $\phi\colon G \to K$ takav da je $\phi(g) \neq e_K$. Neka je $\omega\colon G \to G$ surjektivni homomorfizam. Dokažite da je ω injekcija.
*(**Napomena.** e_G i e_K redom označavaju neutralne elemente u grupama G i K.)*

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, tj. da ω nije injekcija. Tada postoji $g \in G, g \neq e_G$ takav da je $\omega(g) = e_G$. Neka je $g_0 := g$. Koristeći surjektivnost, za svaki $k \geq 0$ definiramo $g_{k+1} \in G$ tako da je $\omega(g_{k+1}) = g_k$. Neka je sada K konačna grupa, a $\phi\colon G \to K$ homomorfizam takav da je $\phi(g) \neq e_K$. Uočimo da je za $n > m$

$$\phi \circ \omega^m(g_m) = \phi(g) \neq e_K$$

i

$$\phi \circ \omega^n(g_m) = e_K,$$

odakle slijedi da su svi homomorfizmi $\phi \circ \omega^m\colon G \to K$ $(m \geq 0)$ različiti. Međutim, budući da je G konačno generirana, a K konačna grupa, postoji najviše konačno mnogo homomorfizama, što je kontradikcija. ✓

Zadatak 6. Neka je G konačna Abelova grupa. Ako $[0, 1)$ gledamo kao na grupu uz zbrajanje mod 1, neka je $\hat{G}$ grupa svih homomorfizama $G \to [0, 1)$ uz standardno zbrajanje funkcija. Za proizvoljan skup $S \subseteq \hat{G}$ neka je

$$B(S) = \{x \in G : \varphi(x) \in [0, 1/2) \text{ za sve } \varphi \in S\}.$$

Ako je grupa $\hat{G}$ konačna, dokažite da za svaki $\Delta \subseteq G$ takav da je $0 \in \Delta$, postoji $S \subseteq \hat{G}$ takav da je $|S| \leq 1 + \log_2 |\Delta|$ i $\Delta \cap B(S) = \{0\}$.

Rješenje. Tvrdnju ćemo dokazati indukcijom po $|\Delta|$. Ako je $\Delta = \{0\}$, možemo uzeti $S = \emptyset$. Pretpostavimo sada da tvrdnja vrijedi za sve skupove Δ takve da je $|\Delta| < 2^n$. Uzmimo neki Δ takav da je $2^n \leq |\Delta| < 2^{n+1}$. Za proizvoljni $x \in \Delta \setminus \{0\}$ preslikavanje $\varphi \mapsto \varphi(x)$ je homomorfizam pa mu je slika konačna podgrupa od $[0, 1)$, odakle slijedi da nužno mora biti i ciklička. Zbog toga (i prvog teorema o izomorfizmu) je

$$\left|\left\{\varphi \in \hat{G} : \varphi(x) \in [0, 1/2)\right\}\right| = \frac{|\hat{G}|}{2},$$

pa sumiranjem po svim $x \in \Delta \setminus \{0\}$ imamo

$$\begin{aligned} \frac{|\hat{G}|(|\Delta| - 1)}{2} &= \sum_{x \in \Delta \setminus \{0\}} \left|\left\{\varphi \in \hat{G} : \varphi(x) \in [0, 1/2)\right\}\right|, \\ &= \sum_{\varphi \in \hat{G}} |\{x \in \Delta \setminus \{0\} : \varphi(x) \in [0, 1/2)\}|, \\ &= \sum_{\varphi \in \hat{G}} (|\Delta \cap B(\{\varphi\})| - 1). \end{aligned}$$

Odavde je jasno da postoji $\varphi_0 \in \hat{G}$ takav da je

$$|\Delta \cap B(\{\varphi_0\})| \leq \frac{|\Delta| - 1}{2} + 1 < \frac{2^{n+1} - 1}{2} + 1 = 2^n + \frac{1}{2},$$

iz čega vidimo da je $|\Delta \cap B(\{\varphi_0\})| < 2^n$. Iskoristivši pretpostavku indukcije za skup $\Delta \cap B(\{\varphi_0\})$ dobivamo skup $S' \subseteq \hat{G}$ takav da je $|S'| \leq 1 + (n-1)$ i $\Delta \cap B(\{\varphi_0\}) \cap B(S') = \{0\}$. Uzevši $S = S' \cup \{\varphi_0\}$ dobivamo traženo.

(***Napomena.*** *Pretpostavka o konačnosti grupe $\hat{G}$ je nepotrebna pošto se može pokazati da ona direktno slijedi iz pretpostavke o konačnosti grupe G (štoviše, pokazuje se da su u tom slučaju dvije grupe izomorfne).)* ✓