IZBORNO NATJECANJE ZA IMC - RJEŠENJA

13. lipnja 2012.

1. ZADATAK

Niz realnih brojeva $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ zadan je rekurzivno sa

$$x_1 = 1, \qquad x_{n+1} = \operatorname{arctg}(x_n), \text{ za } n \geq 1.$$

Pokažite da vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} n x_n^2 = \frac{3}{2}$.

RJEŠENJE

Primijetimo da se tvrdnja koju trebamo pokazati može zapisati $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1/x_n^2}{n} = \frac{2}{3}$. Koristit ćemo *Stolzov teorem*, koji je standardni dio gradiva kolegija *Matematička analiza 1*, a popularno se zove i *l'Hôpitalovo pravilo za nizove*.

Teorem (Stolz-Cesàro). *Neka su (a_n) i (b_n) nizovi realnih brojeva takvi da je (b_n) strogo rastući i neograničen. Ako postoji limes $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$, tada postoji i limes $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ te vrijedi $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}$.*

Iskoristimo li taj teorem u posebnom slučaju $a_n = \frac{1}{x_n^2}$ i $b_n = n$, vidimo da je dovoljno pokazati $\lim\limits_{n\to\infty} \big(\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}\big) = \frac{2}{3}$. Nadalje uočimo da za $x > 0$ vrijedi $0 < \operatorname{arctg} x < x$ pa je niz $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ padajući i limes mu je 0. Dakle je

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{x_{n+1}^2} - \frac{1}{x_n^2}\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{(\operatorname{arctg} x_n)^2} - \frac{1}{x_n^2}\right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{(\operatorname{arctg} x)^2} - \frac{1}{x^2}\right).$$

Posljednji limes se može izračunati višestrukom upotrebom l'Hôpitalovog pravila, naprimjer ovako:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{(\operatorname{arctg} x)^2} - \frac{1}{x^2}\right) &= \left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{arctg} x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{x^2 - (\operatorname{arctg} x)^2}{x^4} \\ &= \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x(1+x^2) - \operatorname{arctg} x}{2x^3(1+x^2)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{(1+3x^2)(1+x^2)-1}{(6x^2+10x^4)(1+x^2)} = \frac{2}{3}.\end{aligned}$$

Još lakše ga je izračunati razvojem funkcije arctg u red potencija oko 0:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\operatorname{arctg} x)^2} - \frac{1}{x^2} &= \frac{1}{\left(x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3)\right)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)} - \frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{2}{3}x^2 + o(x^2)\right) - \frac{1}{x^2} = \frac{2}{3} + o(1).\end{aligned}$$

2. ZADATAK

Neka je n prirodan broj i $S = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Za par podskupova X, Y od S definiramo broj a_{XY} na sljedeći način. Ako postoje prirodni brojevi m, r i j takvi da je

$$Y = \{y_1 < y_2 < ... < y_{m-1}\}, \quad X = \{y_1 < ... < y_r < j < y_{r+1}, ... < y_{m-1}\}$$

onda je $a_{XY} = (-1)^{r+1}$, a inače $a_{XY} = 0$. Za fiksan prirodan broj $k \leq n$, odredite rang (realne) matrice $A = (a_{XY})$ čiji retci su indeksirani k-članim podskupovima $X_1, X_2, ...$ skupa S, a stupci $(k-1)$-članim podskupovima $Y_1, Y_2, ...$ skupa S.

RJEŠENJE

Odgovor je $\binom{n-1}{k-1}$.

Promotrimo retke indeksirane skupovima X koji sadrže broj 1 i stupce indeksirane skupovima Y koji ne sadrže broj 1. Dobivena podmatrica je kvadratna i svaki redak i stupac sadrže točno jedan element različit od 0, pa zaključujemo da je rang matrice A barem jednak $\binom{n-1}{k-1}$.

Neka je V_m realni vektorski prostor s bazom indeksiranom m-podskupovima $X_1, X_2, ...$

Za svaki m-člani podskup X od S definiramo

$$d(X) = \sum_{Y \subset X} a_{XY} \cdot Y$$

te proširimo d linearno do operatora $d : V_m \to V_{m-1}$. Matrica operatora $d : V_k \to V_{k-1}$ u danim bazama je transponirana matrica A.

Za bilo koji m-člani skup X vrijedi $d(d(X)) = \sum_{Z \subset Y \subset X} a_{XY} a_{YZ} \cdot Z = 0$ jer se svaki $m-2$-člani podskup Z skupa X pojavljuje dvaput u toj sumi i to jedno s pozitivnim i jednom s negativnim predznakom.

Primjetimo da djelovanjem matrice A na vektor $(Y_1, Y_2, ...)$ u $V_{k-1}^{\binom{n}{k-1}}$ dobivamo vektor $(dX_1, dX_2, ...)$ u $V_{k-1}^{\binom{n}{k}}$. Ako m-člani skup X ne sadrži broj 1, onda postoji $(m+1)$-člani skup $X' = X \cup \{1\}$. Ako je $d(X') = \pm d(X) \pm d(X_{i_1}) \pm ... \pm d(X_{i_p})$ onda iz formule $d(d(X')) = 0$ dobivamo da $d(X)$ možemo izraziti kao linearnu kombinaciju $d(X_{i_1}), ..., d(X_{i_p})$ pri čemu svi skupovi $d(X_{i_j})$ sadrže broj 1. Time smo pokazali da se svaki redak matrice A indeksiran skupom koji ne sadrži broj 1 može prikazati kao linearna kombinacija redaka koji sadrže broj 1, pa je rang matrice A najviše jednak $\binom{n-1}{k-1}$.

3. ZADATAK

Neka je $p > 2$ prost broj i označimo sa $M_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ skup 2×2 matrica sa elementima u $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

a) Odredite red grupe $G = \{g \in M_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) | det(g) = \pm 1\}$.

b) Dokažite da

$$p | F_{2p(p^2-1)},$$

gdje je F_n $n$ti Fibonaccijev broj ($F_1 = F_2 = 1$ i $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$).

RJEŠENJE

a) $\#G = 2p^2(p-1) + 2p(p-1) = 2p(p^2-1)$.

b) Neka je $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Tada je $F^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$. Budući da je $F \in G$ i #G=$2p(p^2-1)$, vrijedi $F^{2p(p^2-1)+1} \equiv F \pmod{p}$, iz čega tvrdnja slijedi.

4. ZADATAK

Za proizvoljan graf H označimo

$$\mathrm{ex}(n, H) = \max\left\{\text{broj bridova od } G : G \text{ ima } n \text{ vrhova i } H \text{ nije podgraf od } G\right\}.$$

Dokažite da za pozitivne cijele brojeve s i t postoji konstanta c takva da je

$$\mathrm{ex}(n, K_{s,t}) \le cn^{2-\frac{1}{s}}, \quad \text{za svaki pozitivan cijeli broj } n.$$

Napomena: $K_{s,t}$ je oznaka za potpuni bipartitan graf u kojemu jedan skup particije ima s vrhova, a drugi t.

RJEŠENJE

Neka je c takav da je $c^s \ge t$. Pretpostavimo da postoji graf G sa n vrhova i barem $cn^{2-\frac{1}{s}}$ bridova koji ne sadrži $K_{s,t}$ kao podgraf. Uočimo da je tada prosječni stupanj vrha u grafu G barem $2cn^{1-\frac{1}{s}}$. Na dva ćemo načina prebrojati broj parova (v, S) takvih da skup S ima s vrhova koji su svi bridovima direktno povezani sa vrhom v. S jedne strane, uz oznaku $d(v)$ za stupanj vrha v, taj je broj očito jednak

$$\sum_{\text{vrh } v} \binom{d(v)}{s} \ge n\binom{\frac{1}{n}\sum_{\text{vrh } v} d(v)}{s} \ge n\binom{2cn^{1-\frac{1}{s}}}{s} \ge n \cdot \frac{c^s n^{s-1}}{s!} = c^s \frac{n^s}{s!},$$

pri čemu je prva nejednakost posljedica Jensenove nejednakosti, a preostale očito vrijede za dovoljno velike n. S druge strane, promatrani broj je manji ili jednak

$$(t-1)\binom{n}{s} \le (t-1)\frac{n^s}{s!},$$

jer bi u suprotnom postojao skup S sa s vrhova koji imaju t zajedničkih susjeda. Usporedivši dobivene ocjene dobivamo $c^s \le t-1$ što je u kontradikciji sa odabirom broja c.