Izborno natjecanje za IMC

28.05.2008.

Zadatak 1. Pretpostavimo da su u, v različiti, slučajno odabrani korijeni jednadžbe

$$z^{2008} - 1 = 0.$$

Izračunajte vjerojatnost da je $|u + v| \geq \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

Zadatak 2. Neka je $f : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo da postoji konačan limes

$$L := \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(n + x)\, dx.$$

Dokažite da limes

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)\, dx$$

također postoji i izračunajte ga.

Zadatak 3. Neka je $\mathcal{S}$ skup svih matrica reda 2 nad $\mathbb{Z}$ za koje postoji $k \in \mathbb{N}_0$ takav da je $A^k = I$. Nađite najmanji $n \in \mathbb{N}$ za kojeg vrijedi

$$A^n = I, \quad \forall A \in \mathcal{S}$$

Zadatak 4. Neka je R prsten. Označimo sa L presjek svih pravih lijevih ideala od R. Pretpostavimo da je $L^2 \neq 0$. Dokažite da je R prsten s jedinicom.

Zadatak 5. Postoje li $n \in \mathbb{N}$ i periodične funkcije $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_n(x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}?$$

U slučaju potvrdnog odgovora nađite najmanji takav n.

Zadatak 6. Odredite sve derivabilne bijekcije $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ za koje vrijedi

$$f^{-1}(x) = f'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

Svaki zadatak vrijedi *20 bodova.*
Dozvoljeno vrijeme za rješavanje je *5 sati.*

Ilja Gogić
Tomislav Pejković

Izborno natjecanje za IMC

Rješenja zadataka

28.05.2008.

Zadatak 1. Pretpostavimo da su u, v različiti, slučajno odabrani korijeni jednadžbe

$$z^{2008} - 1 = 0.$$

Izračunajte vjerojatnost da je $|u + v| \geq \sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

Rješenje. Kako svi n-ti korijeni iz jedinice čine grupu s obzirom na množenje kompleksnih brojeva, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $u = 1$. Neka je $\theta := \operatorname{Arg} v \in \langle -\pi, \pi]$. Trebamo izračunati vjerojatnost da je

$$|1 + v|^2 = |1 + e^{i\theta}|^2 = 2 + 2\cos\theta \geq 2 + \sqrt{3},$$

što je ekvivalentno s

$$\cos\theta \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \Longleftrightarrow \theta \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]. \tag{1}$$

S druge strane, kako je $v^{2008} = 1$ i $v \neq 1$, imamo

$$\theta \in \left\{\frac{2k\pi}{2008} : \ -1004 < k \leq 1004\right\} \setminus \{0\}. \tag{2}$$

Ako uvažimo (1) i (2), imamo $0 < |k| \leq \lfloor \frac{2008}{12} \rfloor = 167$, pa ukupno ima $334 = 2 \cdot 167$ takvih kuteva. Dakle, tražena vjerojatnost je $\frac{334}{2007}$. $\square$

Zadatak 2. Neka je $f : [0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Pretpostavimo da postoji konačan limes

$$L := \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(n + x)\, dx.$$

Dokažite da limes

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(nx)\, dx$$

također postoji i izračunajte ga.

Rješenje. Neka su $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ i $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nizovi definirani s

$$a_n := \int_0^1 f(n + x)\, dx \quad \text{i} \quad b_n := \int_0^1 f(nx)\, dx.$$

Koristeći teorem o zamjeni varijabli dva puta, za $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$\begin{aligned} b_n &= \int_0^1 f(nx)\, dx = \frac{1}{n}\int_0^n f(x)\, dx = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_i^{i+1} f(x)\, dx \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\int_0^1 f(x + i)\, dx = \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n}. \end{aligned}$$

Prema pretpostavci, niz $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ je konvergenatn i $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Prema Cesàro-Stolzovom teoremu je također

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1}}{n} = L,$$

pa je i $\lim_{n\to\infty} b_n = L$. $\square$

Zadatak 3. Neka je $\mathcal{S}$ skup svih matrica reda 2 nad $\mathbb{Z}$ za koje postoji $k \in \mathbb{N}_0$ takav da je $A^k = I$. Nađite najmanji $n \in \mathbb{N}$ za kojeg vrijedi

$$A^n = I, \quad \forall A \in \mathcal{S}.$$

Rješenje. Najprije primijetimo da je $n \geq 12$. Zaista, stavimo

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tada su A i B matrice iz $\mathcal{S}$ za koje vrijedi $A^4 = I$ i $A^3 \neq I$, te $B^3 = I$ i $B^2 \neq I$. Stoga je $n \geq \mathrm{NZV}\{3, 4\} = 12$.

Dokažimo i obrnutu jednakost, tj. $n \leq 12$. Dovoljno je dokazati da vrijedi

$$(\forall A \in \mathcal{S})(A^{12} = I).$$

Uzmimo proizvoljnu matricu $A \in \mathcal{S}$. Neka je $k_A(\lambda) \in \mathbb{Z}[\lambda]$ karakteristični polinom od A. Tada je

$$k_A(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A.$$

Iz $A^n = I$ slijedi da je $\det A \in \{-1, 1\}$ i da je matrica A dijagonalizbailna, tj. postoje $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ modula 1 takvi da je A slična matrici

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Pretpostavimo da A su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tada je nužno $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$, pa je A slična točno jednoj od matrica

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

U svakom slučaju vrijedi $A^2 = I$.

Pretpostavimo da su $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Tada je $\beta = \overline{\alpha}$, pa je $\det A = |\alpha|^2 = 1$. Kako je

$$\operatorname{tr} A = 2 \operatorname{Re} \alpha \in \langle -2, 2 \rangle \cap \mathbb{Z} = \{-1, 0, 1\},$$

to je ili

$$k_A(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1, \quad \text{ili} \quad k_A(\lambda) = \lambda^2 + 1, \quad \text{ili} \quad k_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1.$$

U svakom slučaju $k_A(\lambda)$ dijeli polinom $p(\lambda) := \lambda^{12} - 1$. Iz Hamilton-Cayleyevog teorema slijedi $A^{12} - I = 0$, tj. $A^{12} = I$. $\square$

Zadatak 4. Neka je R prsten. Označimo sa L presjek svih pravih lijevih ideala od R. Pretpostavimo da je $L^2 \neq 0$. Dokažite da je R prsten s jedinicom.

Rješenje. Dokaz provodimo u koracima.

Lema 1. Postoji $y \in L$ takav da je $y^2 \neq 0$ i $L = Ry$.

Dokaz. Najprije primijetimo da je L lijevi ideal, kao presjek lijevih ideala. Kako je $L^2 \neq 0$, možemo naći $x, y \in L$ takve da je $xy \neq 0$. Odavde slijedi da je $xy \in Ry \neq 0$. Nadalje, Ry je lijevi ideal u R, pa je $L \subseteq Ry$, po definiciji od L. Kako je $y \in R$, to je i $Ry \subseteq L$, pa imamo jednakost $L = Ry$.

Preostaje nam još dokazati da je $y^2 \neq 0$. Zaista, kako je $x \in L = Ry$, možemo naći $r \in R$ takav da je $x = ry$. Iz $xy \neq 0$ slijedi ry^2, pa je specijalno i $y^2 \neq 0$. □

Lema 2. Pretpostavimo da je $Rz = 0$ za neko $z \in R$. Tada je nužno $z = 0$.

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Neka je $z \in R$, $z \neq 0$ takav da je $Rz = 0$. Tada je aditivna podgrupa $\langle z \rangle$ od R generirana sa z lijevi ideal u R. Budući da je $z \neq 0$, imamo $y \in Ry = L \subseteq \langle z \rangle$. Iz $Rz = 0$ slijedi $z^2 = 0$. Stoga je $L^2 \subseteq \langle z \rangle^2 = 0$, što je kontradikcija. □

Neka je $y \in L$ kao u lemi 1. Tada je $y \in L = Ry$, pa postoji element $e \in R$ takav da je $ey = y$. Tvrdimo da je e jedinica u R.

Pokažimo da je e desna jedinica u R. Pretpostavimo suprotno. Tada možemo nać $a \in R$ takav da je $u := ae - a \neq 0$. Prema lemi 2 je $Ru \neq 0$, pa je

$$y \in Ry = L \subseteq Ru.$$

Stoga možemo naći $l \in R$ takav da je $l(ae - a) = lu = y$. Ako tu jednakost pomnožimo s desne streane s y, dobit ćemo

$$y^2 = l(ae - a)y = l(aey - ay) = l(ay - ay) = 0,$$

što je kontradikcija s činjenicom da je $y^2 \neq 0$.

Preostaje nam još pokazati da je e lijeva jedinica u R. Uzmimo proizvoljni $a \in R$. Tada imamo

$$r(ea - a) = (re)a - ra = ra - ra = 0, \quad \forall r \in R.$$

Stoga je $R(ea - a) = 0$, pa lema 2 povlači a je $ea - a = 0$, tj. $ea = a$.

□

Zadatak 5. Postoje li $n \in \mathbb{N}$ i periodične funkcije $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \cdots + \varphi_n(x) = x^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}?$$

U slučaju potvrdnog odgovora nađite najmanji takav n.

Rješenje. Tvrdimo da je $n = 3$ najmanji $n \in \mathbb{N}$ za kojeg se funkcija $f(x) := x^2$ može prikazati u obliku zbroja n periodičnih funkcija.

Najprije ćemo pokazati da se f zaista može prikazati kao zbroj tri periodične funkcije. Za konstrukciju će nam trebati sljedeća dva (osnovna) rezultata iz Teorije vektorskih prostora, koja direktno slijede iz Zornove leme:

Teorem 1. Svaki vektorski prostor V ima (barem jednu) Hamelovu bazu.

Teorem 2. Ako je $\mathcal{S} \subseteq V$ linearno nezavisan podskup vektorskog prostora V, tada postoji Hamelova baza $\mathcal{B}$ za V koja sadrži $\mathcal{S}$.

Svako polje $\mathbb{F}$ ima strukturu vektorskog prostora nad bilo kojim svojim potpoljem $\mathbb{K}$. Takav vektorski prostor označimo sa $\mathbb{F}_{\mathbb{K}}$.

Prethodne teoreme ćemo primijeniti na slučaj $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ i $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$.

Neka su $a, b, c \in \mathbb{R}_+$ tri pozitivna realna broja koja su linearno nezavisna nad $\mathbb{Q}$. Prema teoremu 2 skup $\{a, b, c\}$ možemo nadopuniti do Hamelove baze $\mathcal{B}$ za $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$. Tada za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji jedinstvena funkcija $\psi_x : \mathcal{B} \to \mathbb{Q}$ sa konačnim nosačem takva da je

$$x = \sum_{u \in \mathcal{B}} \psi_x(u)u.$$

Definirajmo funkcije $\omega_1, \omega_2, \omega_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formulama

$$\omega_1(x) := \psi_x(a)a, \quad \omega_2(x) := \psi_x(b)b, \quad \omega_3(x) := \sum_{u \in \mathcal{B} \setminus \{a,b\}} \psi_x(u)u.$$

Tada su ω_1, ω_2 i ω_3 periodične funkcije, redom sa periodima b, c, a, c i a, b. Dokažimo na primjer da su ω_1 i ω_3 periodične s periodom b. Uzmimo proizvoljan $x \in \mathbb{R}$. Tada je

$$x + b = \psi_{x+b}(a)a + \psi_{x+b}(b)b + \sum_{u \in \mathcal{B} \setminus \{a,b\}} \psi_{x+b}(u)u.$$

S druge strane je

$$x + b = \psi_x(a)a + (\psi_x(b) + 1)b + \sum_{u \in \mathcal{B} \setminus \{a,b\}} \psi_x(u)u.$$

Zbog jedinstvenosti pripadnog rastava, imamo

$$\psi_{x+b}(a) = \psi_x(a) \quad \text{i} \quad \sum_{u \in \mathcal{B} \setminus \{a,b\}} \psi_{x+b}(u) = \sum_{u \in \mathcal{B} \setminus \{a,b\}} \psi_x(u),$$

pa je

$$\omega_1(x + b) = \omega(x) \quad \text{i} \quad \omega_3(x + b) = \omega_3(x).$$

Slično bismo pokazali i ostale tvrdnje.

Napokon, definirajmo funkcije $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formulama

$$\varphi_1(x) := \omega_2(x)^2 + 2\omega_2(x)\omega_3(x), \quad \varphi_2(x) := \omega_3(x)^2 + 2\omega_1(x)\omega_3(x),$$
$$\varphi_3(x) := \omega_1(x)^2 + 2\omega_1(x)\omega_2(x).$$

Primijetimo da su φ_1, φ_2 i φ_3 periodične funkcije, redom sa periodima a, b i c.

Kako je

$$x = \omega_1(x) + \omega_2(x) + \omega_3(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

imamo

$$\begin{aligned} x^2 =& \omega_1(x)^2 + \omega_2(x)^2 + \omega_3(x)^2 + 2(\omega_1(x)\omega_2(x) + \omega_2(x)\omega_3(x) + \omega_1(x)\omega_3(x)) \\ =& \varphi_1(x) + \varphi_2(x) + \varphi_3(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Time smo pokazali da funkciju $f(x) = x^2$ možemo prikazati u obliku zbroja tri periodične funkcije.

Dokažimo da funkciju f ne možemo prikazati u obliku zbroja od dvije periodične funkcije. Pretpostavimo suprotno. Tada postoje periodične funkcije $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, redom sa periodima $a > 0$ i $b > 0$, takve da je

$$x^2 = f(x) = g(x) + h(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Tada za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$f(x + a + b) - f(x + a) - f(x + b) + f(x) = 0. \tag{3}$$

Zaista,

$$f(x+a+b)-f(x+a)-f(x+b)+f(x) = (g(x+a+b)-g(x+b)-g(x+a)+g(x))$$
$$+(h(x + a + b) - h(x + a) - h(x + b) + h(x)) = 0.$$

S druge strane, lijeva strana od (3) je jednaka

$$(x + a + b)^2 - (x + a)^2 - (x + b)^2 + x^2 = 2ab > 0,$$

budući da su $a, b > 0$. Dobili smo kontradikciju i time smo u potpunosti dokazali tvrdnju.

$\square$

Zadatak 6. Odredite sve derivabilne bijekcije $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ za koje vrijedi

$$f^{-1}(x) = f'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

Rješenje. Najprije primijetimo da funkcija $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ definirana formulom

$$f(x) := ax^c, \quad \text{za} \quad c := \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{i} \quad a := c^{1-c}.$$

zadovoljava uvjete iz zadatka. Tvrdimo da je f jedinstvena derivabilna bijekcija za koju vrijedi

$$f^{-1}(x) = f'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \tag{4}$$

Jedinstvenost će slijediti iz činjenice da je svaka derivabilna bijekcija $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ za koju vrijedi (4) nužno analitička funkcija na $\mathbb{R}_+$. Dokaz te tvrdnje bazirat će se na sljedećoj lemi.

Lema 3 (Bernsteinov teorem). Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval i pretpostavimo da je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija klase $C^\infty(I)$ takva da je

$$f^{(n)}(x) \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+, x \in I.$$

Tada je $f \in C^\omega(I)$, tj. f je analitička funkcija na I.

Dokaz. Fiksirajmo $a \in I$. Prema Taylorovoj formuli s integralnim ostatkom, za sve $n \in \mathbb{N}$ i $x \in I$ imamo

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x - a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_n(x), \tag{5}$$

gdje je n-ti ostatak

$$R_n(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(s)(x-s)^n\,ds \tag{6}$$

prikazan u Lagrangeovom integralnom obliku. Uzmimo $b \in I$ takav da je $a < b$ Tvrdimo da R_n konvergira lokalno uniformno prema 0 na $\langle a, b\rangle$. Zaista, ako dva puta iskoristimo teorem o zamjeni varijabli, imamo

$$\begin{aligned} R_n(x) =& \frac{1}{n!}\int_0^{x-a} f^{(n+1)}(u+a)(x-u-a)^n\,du \\ =& \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}((x-a)t+a)(1-t)^n\,dt. \end{aligned}$$

Kako je $f^{(n+1)}$ rastuća funkcija na I imamo

$$\begin{aligned} 0 \le R_n(x) \le& \frac{(x-a)^{n+1}}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}((b-a)t+a)(1-t)^n\,dt \\ =& \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{n+1} R_n(b), \quad \forall x \in \langle a, b\rangle. \end{aligned}$$

Iz formule (5) i nenegativnosti svih derivacija $f^{(0)}, f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}$, slijedi $R_n(b) \le f(b)$. Stoga je

$$0 \le R_n(x) \le \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{n+1} f(b), \quad \forall x \in \langle a, b\rangle.$$

Ako pustimo da $n \to \infty$, imamo $R_n(x) \overset{\text{loc}}{\rightrightarrows} 0$ lokalno uniformno na $\langle a, b\rangle$. Kako su $a, b \in I$, $a < b$ bili proizvoljni, zaključujemo da je $f \in C^\omega(I)$. $\square$

Korolar 1. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoren interval i pretpostavimo da je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija klase $C^\infty(I)$ takva da je

$$(-1)^n f^{(n)}(x) \ge 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+, x \in I.$$

Tada je $f \in C^\omega(I)$.

Dokaz. Neka je $-I := \{-x : \ x \in I\}$ i neka je $g : -I \to \mathbb{R}$ funkcija definirana formulom

$$g(x) := f(-x).$$

Tada je $g^{(n)}(x) \ge 0$, za sve $n \in \mathbb{Z}_+$ i $x \in -I$. Prema prethodnoj lemi g je analitička funkcija na $-I$. Kako je $x \mapsto -x$ analitička funkcija, to je i f analitička funkcija (kao kompozicija dviju analitičkih funkcija). $\square$

Lema 4. Neka je $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ derivabilna bijekcija za koju vrijedi (4). Tada je $f \in C^\omega(\mathbb{R}_+)$.

Dokaz. Iz jednakosti (4) slijedi da je $f'(x) > 0$, za sve $x \in \mathbb{R}$. Stoga je f strogo rastuća na $\mathbb{R}_+$ i f^{-1} je derivabilna na $\mathbb{R}_+$. Iz jednakosti (4) slijedi da je i f' derivabilna (bijekcija) na $\mathbb{R}_+$. Induktivno dobivamo da je f klase C^∞ na

$\mathbb{R}_+$. Derivirajući jednakost $f(f'(x)) = x$, dobivamo $f''(x) > 0$, za sve $x \in \mathbb{R}_+$. Tvrdimo da vrijedi

$$(-1)^n f^{(n)}(x) > 0, \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R}_+ \text{ i } n \geq 2. \tag{7}$$

Dokaz provodimo indukcijom koristeći formulu za n-tu derivaciju kompozicije (tzv. formula Faà di Bruno):

$$(f \circ g)^{(n)}(x) = \sum \frac{n!}{k_1!k_2! \cdots k_n!} f^{(k_1+k_2+\cdots+k_n)}(g(x)) \prod_{1 \leq j \leq n} \left(\frac{g^{(j)}(x)}{j!} \right)^{k_j}.$$

gdje se sumira po svim $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}_+$ za koje je $\sum_{j=1}^{n} j \cdot k_j = n$.

Neka je $n \geq 2$ i pretpostavimo da je $(-1)^m f^{(m)}(x) > 0$ za sve $x \in \mathbb{R}_+$ i $2 \leq m \leq n$. Tada je

$$\begin{aligned} 0 = (f \circ f')^{(n)}(x) = &\sum \frac{n!}{k_1!k_2! \cdots k_n!} f^{(k_1+k_2+\cdots+k_{n-1})}(f'(x)) \left(\frac{f''(x)}{1!} \right)^{k_1} \\ &\left(\frac{f^{(3)}(x)}{2!} \right)^{k_2} \cdots \left(\frac{f^{(n)}(x)}{(n-1)!} \right)^{k_{n-1}} + f'(f'(x)) f^{(n+1)}(x), \end{aligned}$$

gdje se sumira po svim $k_1, k_2, \ldots, k_{n-1} \in \mathbb{Z}_+$ za koje je $\sum_{j=1}^{n-1} j \cdot k_j = n$. Iz pretpostavke indukcije slijedi $\operatorname{sgn} f^{(m)}(x) = (-1)^m$, za sve $x \in \mathbb{R}_+$ i $2 \leq m \leq n$, pa je

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} f^{(n+1)}(x) &= \operatorname{sgn} \left(f'(f'(x)) f^{(n+1)}(x) \right) \\ &= -\operatorname{sgn} \left[(-1)^{k_1+k_2+\cdots+k_{n-1}} (-1)^{2k_1} (-1)^{3k_2} \cdots (-1)^{nk_{n-1}} \right] \\ &= -(-1)^n = (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Time je dokazana tvrdnja (7), pa je prema korolaru 1 $f'' \in C^\omega(\mathbb{R}_+)$. Stoga je i $f \in C^\omega(\mathbb{R}_+)$. $\square$

Lema 5. Pretpostavimo da je $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ derivabilna bijekcija za koju vrijedi uvjet (4). Tada postoji jedinstven $a > 0$ takav da vrijedi

$$f(x) < x, \quad \forall x \in \langle 0, a \rangle \quad \text{te} \quad f(x) > x, \quad \forall x \in \langle a, +\infty \rangle$$

Dokaz. Budući da je f strogo rastuća bijekcija na $\mathbb{R}_+$, imamo $\lim_{x \to 0+} f(x) = 0$. Dodefinirajmo $f(0) := 0$. Tada je f neprekidna na $[0, +\infty\rangle$. Kako je f strogo konveksna ($f''(x) > 0$, za sve $x \in \mathbb{R}_+$) dovoljno je dokazati da f ima fiksnu točku $a > 0$. Naime, ako je $f(a) = a$ i $0 < x < a$ tada iz Jensenove nejednakosti slijedi

$$f(x) = f\left(\left(1 - \frac{x}{a}\right) 0 + \frac{x}{a} a \right) < \left(1 - \frac{x}{a}\right) f(0) + \frac{x}{a} f(a) = x.$$

Slično, za $a < x$ imamo

$$a = f(a) = f\left(\left(1 - \frac{a}{x}\right) 0 + \frac{a}{x} x \right) < \left(1 - \frac{a}{x}\right) f(0) + \frac{a}{x} f(x) \Longrightarrow f(x) > x.$$

Dokažimo da f zaista ima fiksnu točku $a > 0$. Iz jednakosti

$$f'(f(x)) f'(x) = x f'(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}_+$$

slijedi

$$f(f(x)) = \int_0^x tf'(t)\,dt, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+. \tag{8}$$

Pretpostavimo da je $f(x) > x$ za sve $x \in \mathbb{R}_+$. Kako je f strogo rastuća imamo $f(f(x)) > f(x)$. Specijalno, iz (8) za $x = 1$ dobivamo

$$\int_0^1 f'(t)(t-1)\,dt > 0,$$

što je nemoguće, jer je $f'(t) > 0$, za sve $t \in \mathbb{R}_+$. S druge strane, ako bi bilo $f(x) < x$ za sve $x \in \mathbb{R}_+$, tada bi iz (8) slijedilo

$$f(x) > f(f(x)) = \int_0^x tf'(t)\,dt > \int_0^x f(t)f'(t)\,dt = \frac{1}{2}(f(x))^2, \quad \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

Odavde bi slijedilo da je $f(x) < 2$, za sve $x \in \mathbb{R}_+$, što je nemoguće, jer je prema pretpostavci f bijekcija. Budući da je f neprekidna, zaključujemo da postoji $a > 0$ takav da je $f(a) = a$.

$\square$

Napokon, vratimo se dokazu jedinstvenosti od f. Pretpostavimo da su $f_1, f_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ derivabilne bijekcije za koje vrijedi (4) (uz odgovarajuće supstitucije $f \leftarrow f_i$, $i = 1, 2$). Neka su a_1 i a_2 redom fiksne točke od f_1 i f_2 (koje postoje prema lemi 5). Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $a_2 \le a_1$ i stavimo

$$g := f_1 - f_2.$$

Ako bi imali $a_1 = a_2$, tada uvjet (4) daje $g^{(n)}(a) = 0$, za sve $n \in \mathbb{Z}_+$. Prema lemi 4 f_1 i f_2 su analitičke funkcije na $\mathbb{R}_+$. Stoga je i g analitička na $\mathbb{R}_+$. Iz teorema o jedinstvenosti analitičke funkcije slijedi $g = 0$, tj, $f_1 = f_2$.

Ako bi bilo $a_2 < a_1$ imali bi

$$f_1(x) < x \le f_2(x) \quad \text{i} \quad f_1'(x) > x \ge f_2'(x), \quad \forall x \in [a_2, a_1\rangle.$$

Stoga je

$$g(x) < 0 \quad \text{i} \quad g'(x) > 0, \quad \forall x \in [a_2, a_1\rangle.$$

Kako je $\lim_{x\to 0+} g(x) = 0$, postoji $b \in \langle 0, a_2\rangle$ takav da je

$$g'(b) = 0, \quad g'(x) > 0, \quad \forall x \in \langle b, a_1\rangle \quad \text{te} \quad g(x) < 0, \quad \forall x \in [b, a_1\rangle. \tag{9}$$

Stavimo $c := f_1'(b) = f_2'(b)$. Tada je $c \in \langle b, a_2\rangle$, jer je

$$b < f_1'(b) = c = f_2'(b) < f_2'(a_2) = a_2.$$

Iz (9) slijedi $g(c) < 0$. S druge strane je $f_1(c) = f_1(f_1'(b)) = b$ i $f_2(c) = f_2(f_2'(b)) = b$, pa je $g(b) = f_1(b) - f_2(b) = 0$. Time smo dobili kontradikciju s pretpostavkom $a_2 < a_1$.

Dakle, $a_1 = a_2$ te je $f_1 = f_2$.

$\square$

Ilja Gogić
Tomislav Pejković