Izborno natjecanje za IMC 2005

4. 6. 2005.

Zadatak 1.

Dani su realni brojevi b_1, b_2, b_3 takvi da je $|b_n| \leq 1$; $n = 1, 2, 3$. Dokažite da postoje brojevi $a_k \geq 0$; $k = 1, 2, 3, 4$ i predznaci $\varepsilon_{n,k} \in \{-1, 1\}$; $n = 1, 2, 3$; $k = 1, 2, 3, 4$ takvi da vrijedi

$$\sum_{k=1}^{4} a_k = 1, \qquad \sum_{k=1}^{4} \varepsilon_{n,k} a_k = b_n; \quad n = 1, 2, 3.$$

Zadatak 2.

Neka je $[a_{i,j}]_{i,j\in\mathbb{N}}$ beskonačna matrica prirodnih brojeva u kojoj se svaki prirodni broj pojavljuje najviše 2005 puta. Dokažite da postoje indeksi $m, n \in \mathbb{N}$ takvi da je $a_{m,n} > mn$.

Zadatak 3.

(a) Promatramo polinom $P(x) = x^5 \in \mathbb{R}[x]$. Dokažite da ni za koji $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ polinom $P(x+\alpha) - P(x)$ nema realnih korijena.

(b) Neka je $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ polinom stupnja $n \geq 2$ koji ima n realnih i različitih korijena. Dokažite da postoji $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takav da polinom $P(x+\alpha) - P(x)$ ima sve korijene realne.

Zadatak 4.

Dokažite da za $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k\alpha}{k} > 0.$$

Zadatak 5.

Neka je $S = \{4, 8, 9, 16, \ldots\}$ skup svih prirodnih brojeva koji su potpune potencije, tj.

$$S := \left\{ a^b \,:\, a, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \right\}.$$

Dokažite da je

$$\sum_{n\in S} \frac{1}{n-1} = 1.$$

Zadatak 6.

Matrica A tipa $n \times n$ je na slučajan način popunjena brojevima iz skupa $\{0, 1\}$. (Preciznije, elementi od A su nezavisne slučajne varijable koje s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$ poprimaju vrijednosti 0 i 1.) Izračunajte očekivanu vrijednost od $(\det A)^2$.

Svaki zadatak vrijedi *20 bodova.*
Vrijeme pisanja je *5 sati.*

M. Kazalicki, V. Kovač, M. Praljak