Pregled predavanja

- Uvod
- Linearne diferencijalne jednadžbe
- Harmonijski oscilator
- Harmonijski oscilator i kružno gibanje

Uvod

- Harmonijsko gibanje je poseban oblik periodičnog gibanja
- Periodično gibanje čest je oblik gibanja u prirodi pa je često predmet proučavanja fizičara
- Rješavanje jednadžbe gibanja harmonijskog oscilatora olakšava rješavanje cijele klase fizikalnih problema

Linearne diferencijalne jednadžbe

- Javljaju se u različitim poljima fizike, i u drugim znanostima
- Opisuju velik broj fenomena, zato ih i proučavamo tako detaljno
- Najopćenitiji oblik:

$$a_n\, d^n x / dt^n + a_{n-1}\, d^{n-1} x / dt^{n-1} + \ldots + a_1\, dx/dt + a_0 x = f(x)$$

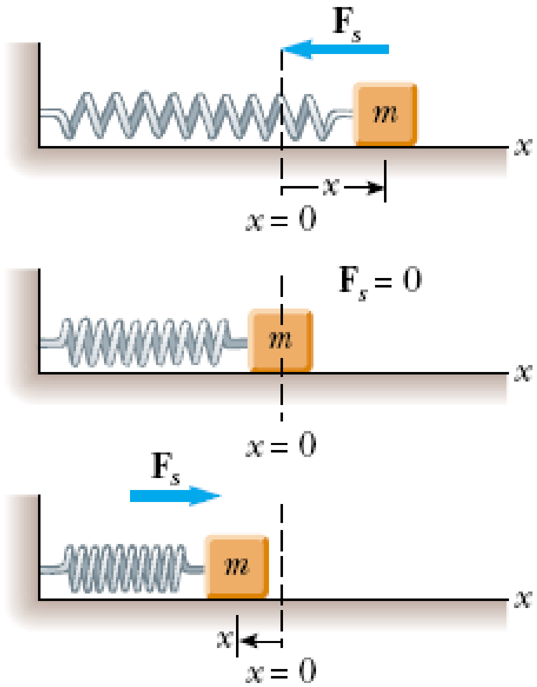
- Jednostavan sustav čije je gibanje opisano linearnom diferencijalnom jednadžbom jest masa na opruzi

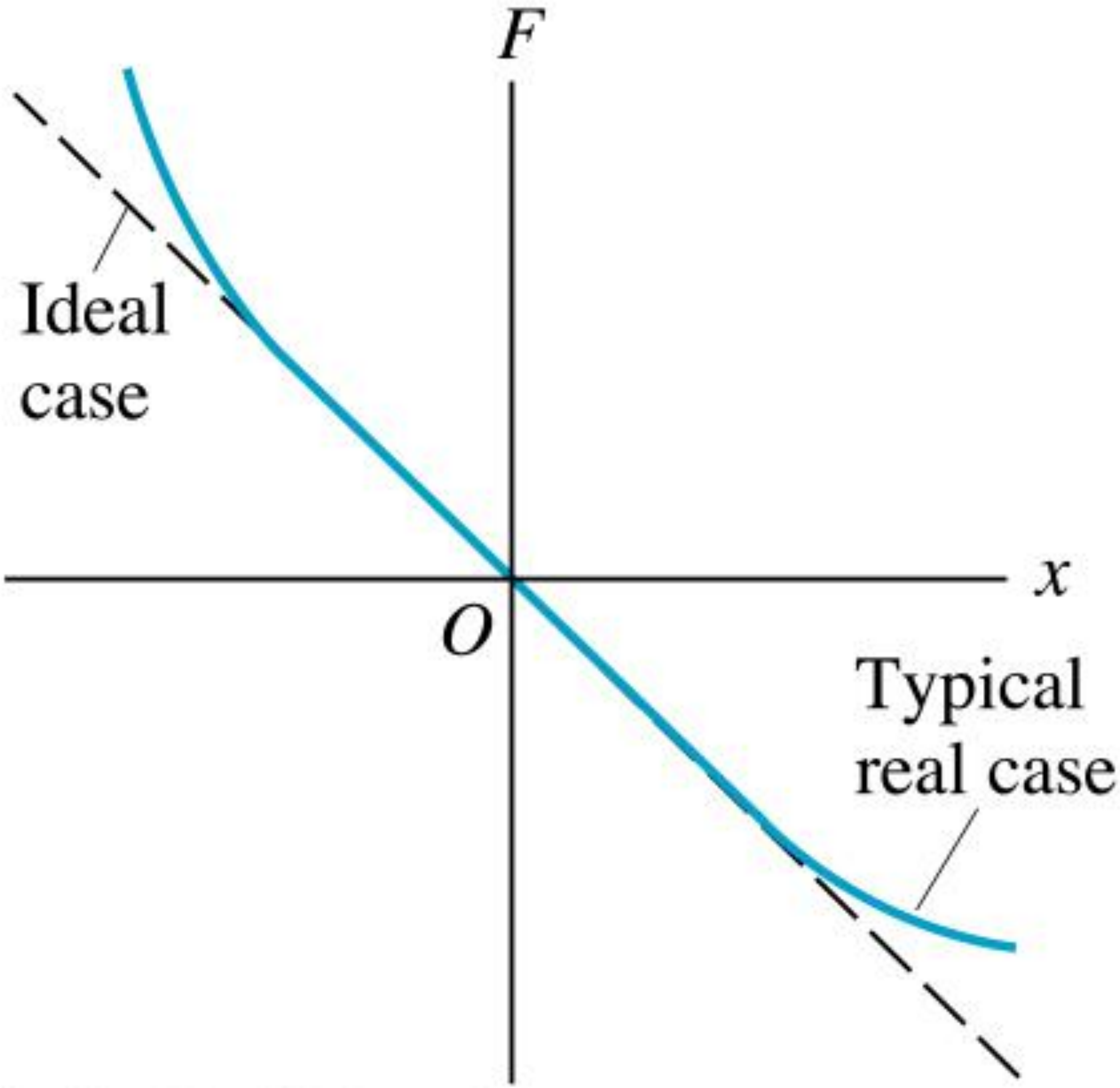
Harmonijski oscilator

- Tijelo se slobodno giba po podlozi bez trenja
- Kada se tijelo pomakne iz položaja ravnoteže na njeg dijeluje sila opruge dana Hookeovim zakonom:

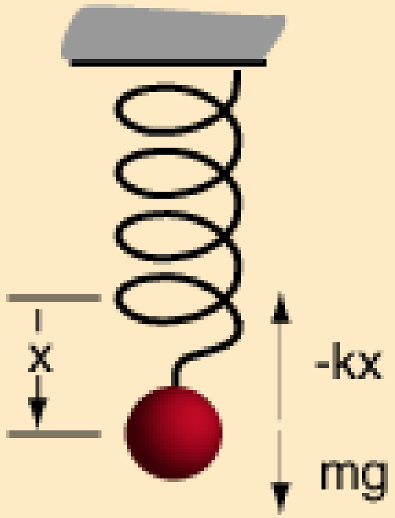
$$F = -kx$$

- Sila je uvijek usmjerena prema položaju ravnoteže i suprotnog je smjera od pomaka




F
Ideal
case
x
O
Typical
real case

Titranje tijela obješenog na oprugu

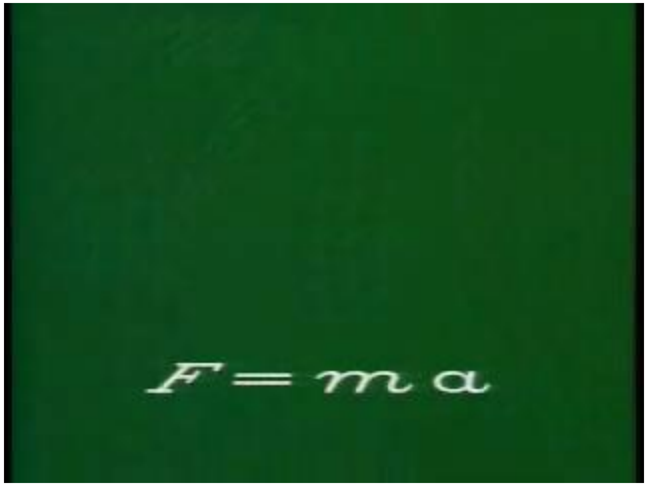


$$F_x = -kx \quad \Rightarrow \quad ma_x = -kx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dv_x}{dt} = -x$$

Harmonijski oscilator

- Znamo zakon sile
- Želimo dobiti izraz pomoću kojeg možemo računati položaj tijela
- Pogledajmo još jednom ono što znamo:



Primjenit ćemo drugi Newtonov zakon:

$$-kx = m\left(\frac{dv_x}{dt}\right)$$

Dobivamo:

$$\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m}x$$

Harmonijski oscilator

- Koje je rješenje ove diferencijalne jednadžbe?
- Treba nam funkcija čija će druga derivacija biti upravo $-\omega^2 x, \;\; \omega^2 = k/m$
- Trigonometrijske funkcije sinus i kosinus ponašaju se upravo na taj način, i možemo na jednoj od njih izgraditi rješenje

Harmonijski oscilator

- Konstante gibanja
  - amplituda A
  - početni fazni kut ϕ
  - kutna frekvencija ω
- Period $T = 2\pi/\omega$

  Frekvencija gibanja $f = 1/T$
- Faza gibanja $\cos(\omega t + \phi)$

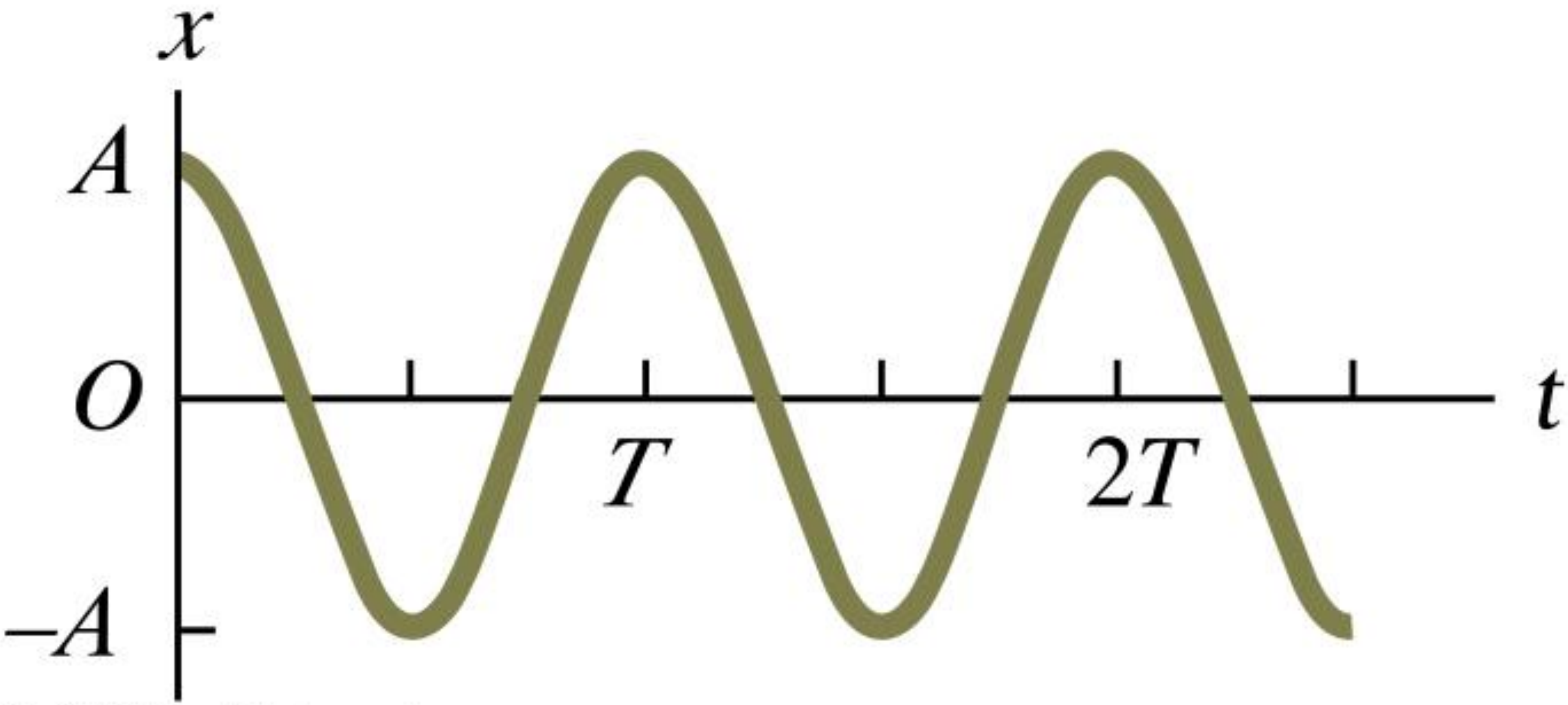
Harmonijski oscilator

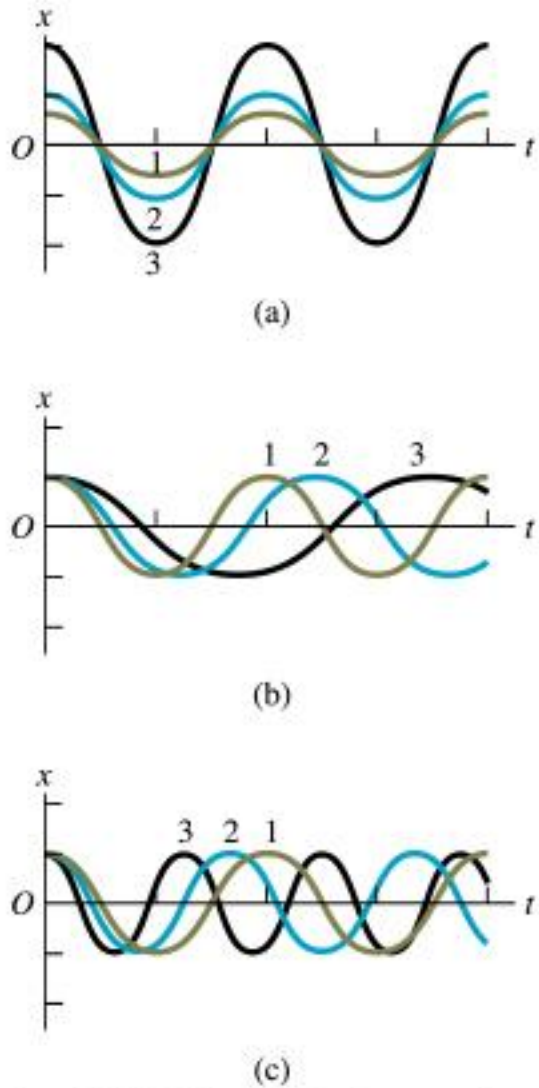
- Rješenje: $x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$

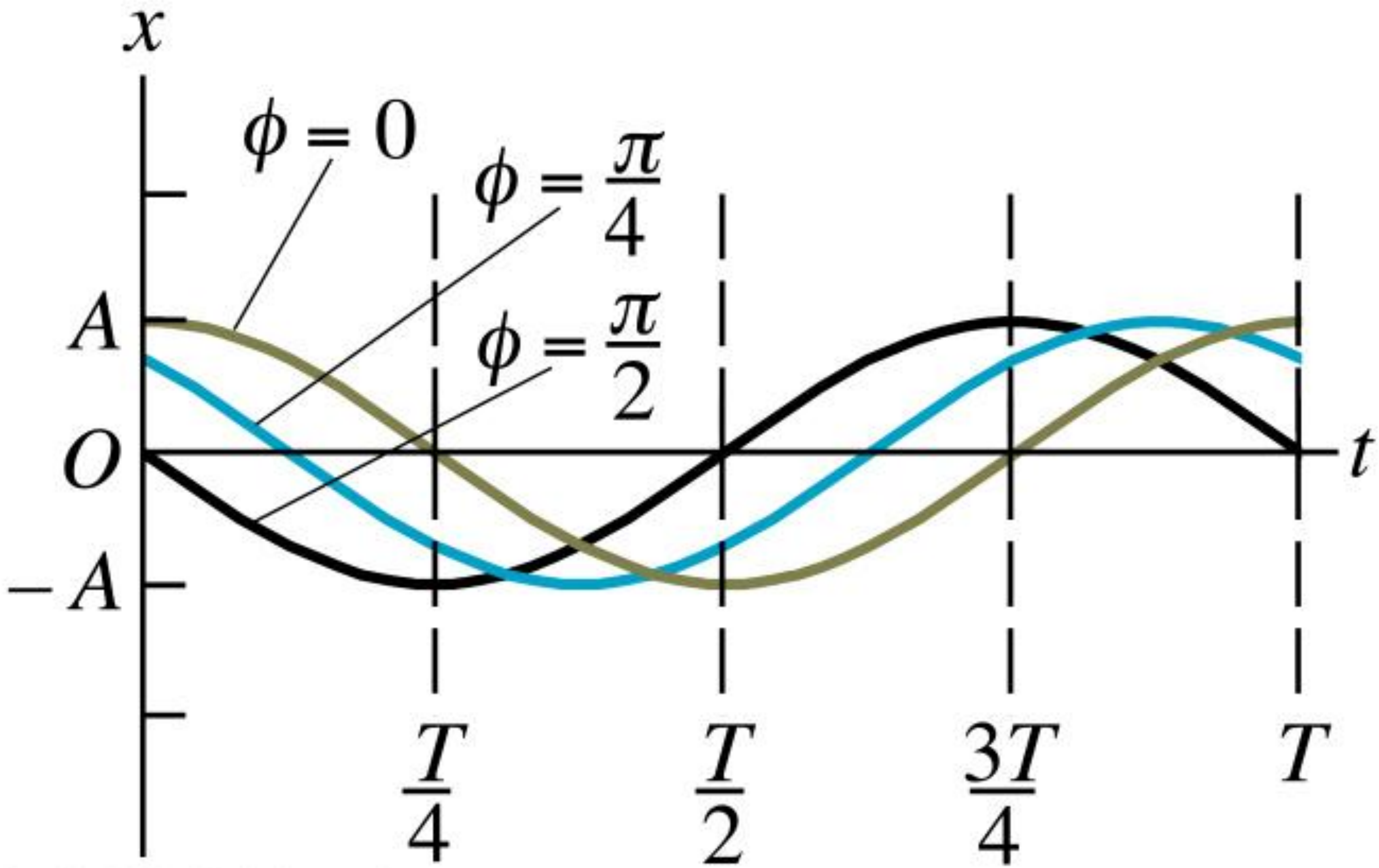
$$\frac{dx}{dt} = A\frac{d}{dt}\cos(\omega t + \phi) = -\omega A\sin(\omega t + \phi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega A\frac{d}{dt}\sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 A\cos(\omega t + \phi)$$

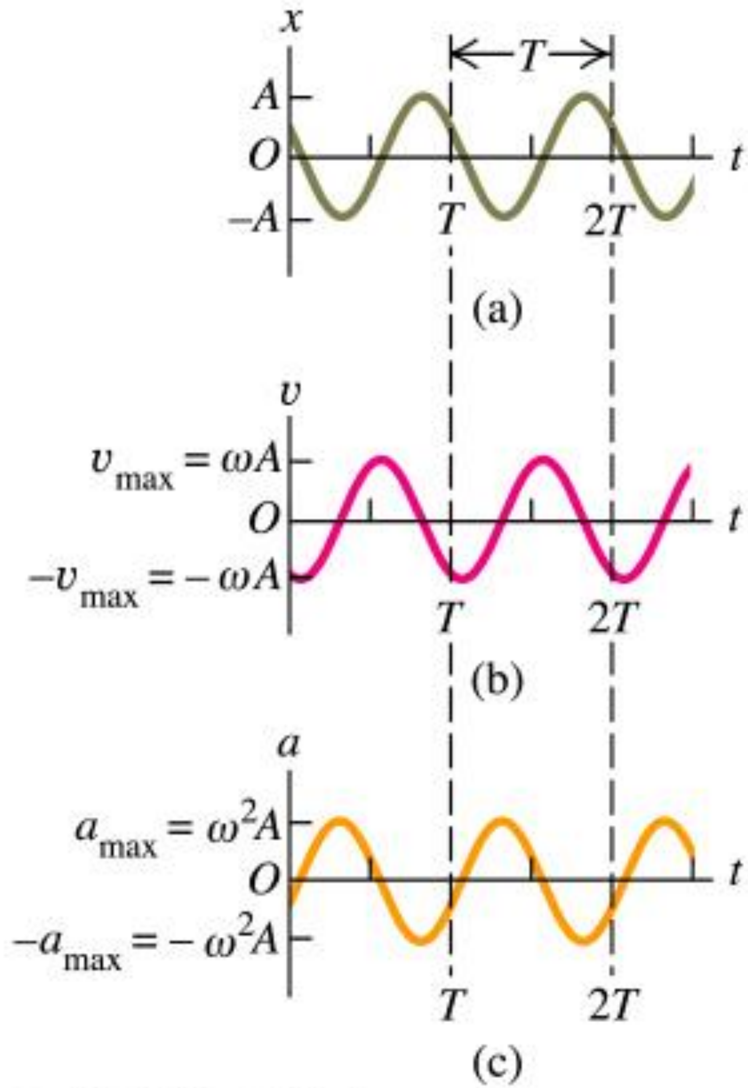
$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

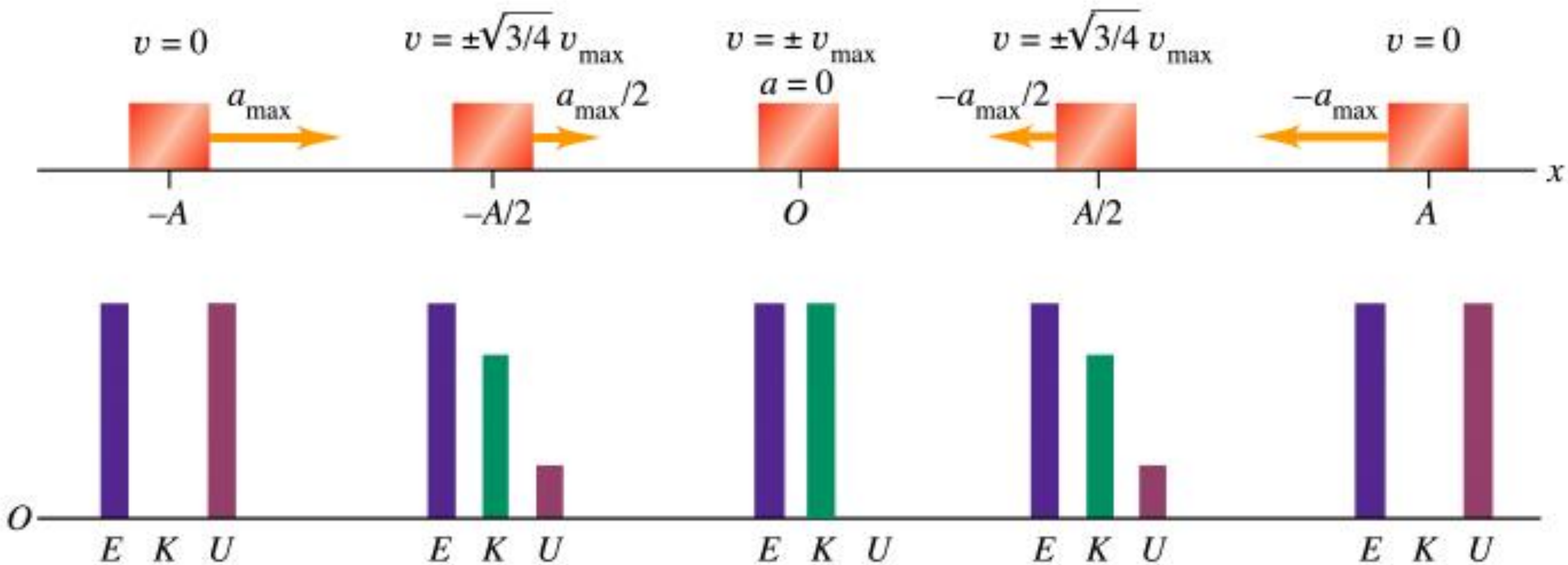

x
A
O
t
T
2T
–A


x
O
t
1
2
3
(a)
x
O
t
1 2 3
(b)
x
O
t
3 2 1
(c)

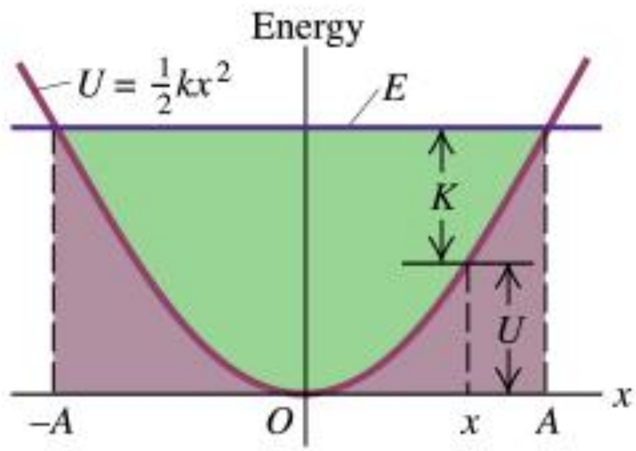


x
$\phi = 0$
$\phi = \frac{\pi}{4}$
$\phi = \frac{\pi}{2}$
A
O
−A
t
$\frac{T}{4}$
$\frac{T}{2}$
$\frac{3T}{4}$
T

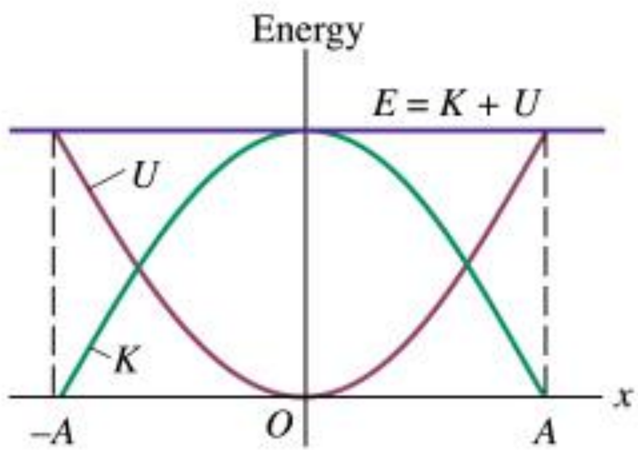

x
T
A
O
t
–A
T
2T
(a)
v
$v_{max} = \omega A$
O
t
$-v_{max} = -\omega A$
T
2T
(b)
a
$a_{max} = \omega^2 A$
O
t
$-a_{max} = -\omega^2 A$
T
2T
(c)



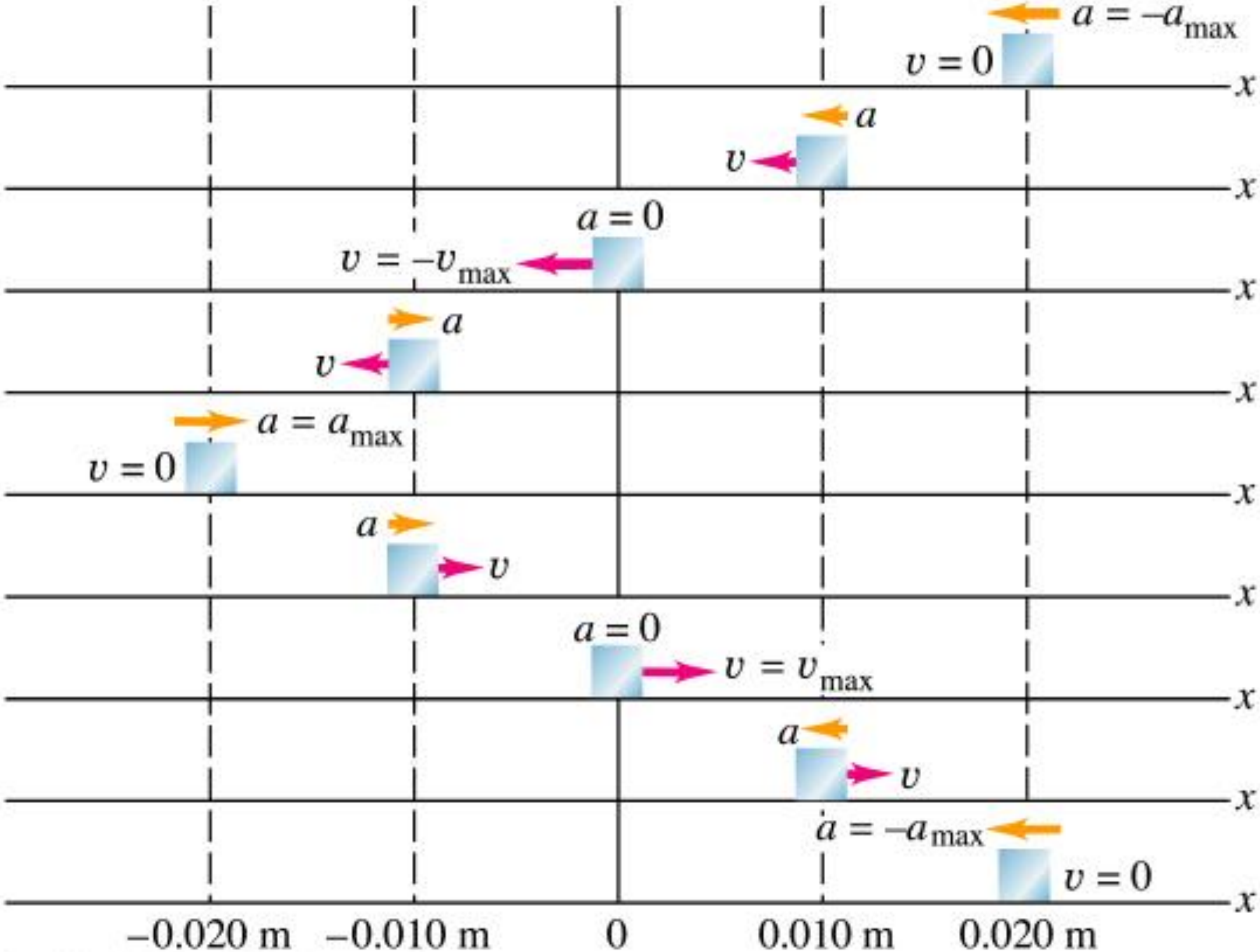
$v = 0$
$v = \pm\sqrt{3/4}\, v_{max}$
$v = \pm v_{max}$
$v = \pm\sqrt{3/4}\, v_{max}$
$v = 0$
a_{max}
$a_{max}/2$
$a = 0$
$-a_{max}/2$
$-a_{max}$
x
$-A$
$-A/2$
O
$A/2$
A
O
E K U
E K U
E K U
E K U
E K U



(a)



(b)

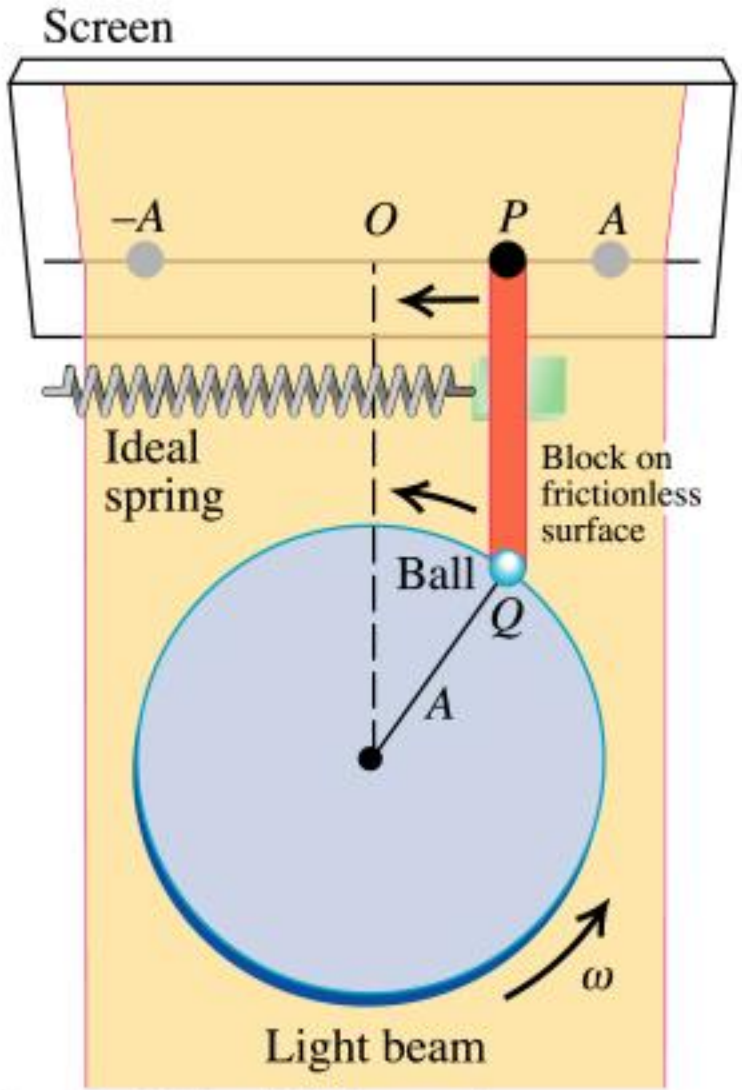


$a = -a_{max}$
$v = 0$
x
a
v
x
$a = 0$
$v = -v_{max}$
x
a
v
x
$a = a_{max}$
$v = 0$
x
a
v
x
$a = 0$
$v = v_{max}$
x
a
v
x
$a = -a_{max}$
$v = 0$
x
−0.020 m
−0.010 m
0
0.010 m
0.020 m

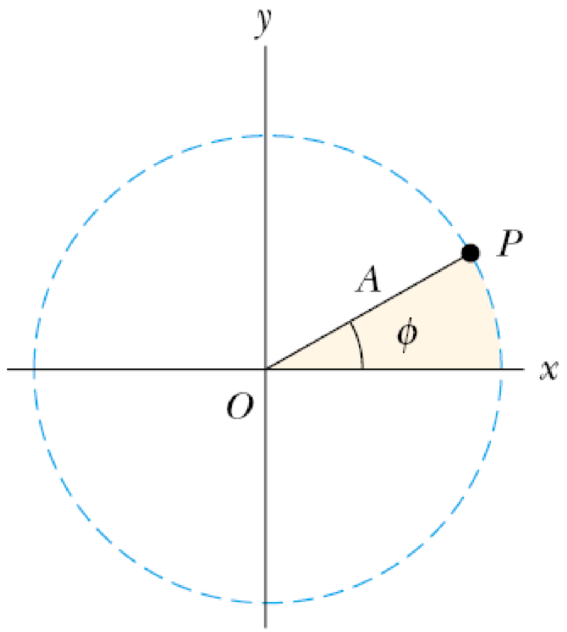
Harmonijski oscilator

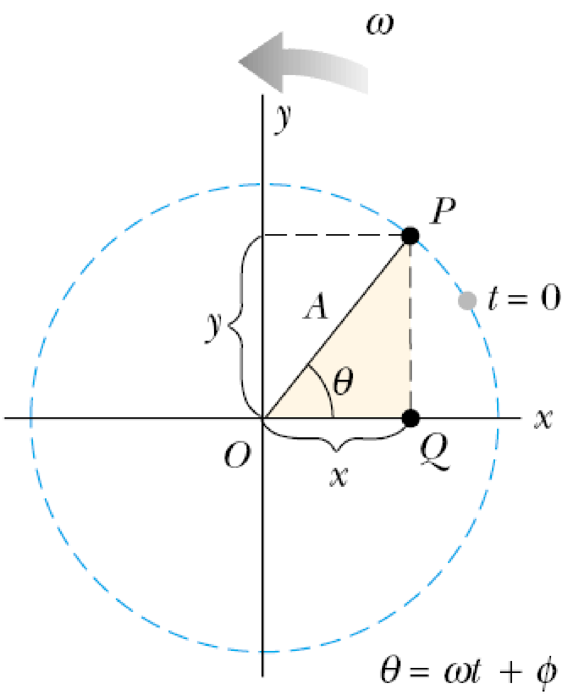
- Do rješenja diferencijalne jednadžbe došlo se pogađanjem
- Ideja je posve prirodna zbog veze između kružnog gibanja i jednostavnog harmonijskog gibanja

Harmonijski oscilator i kružno gibanje



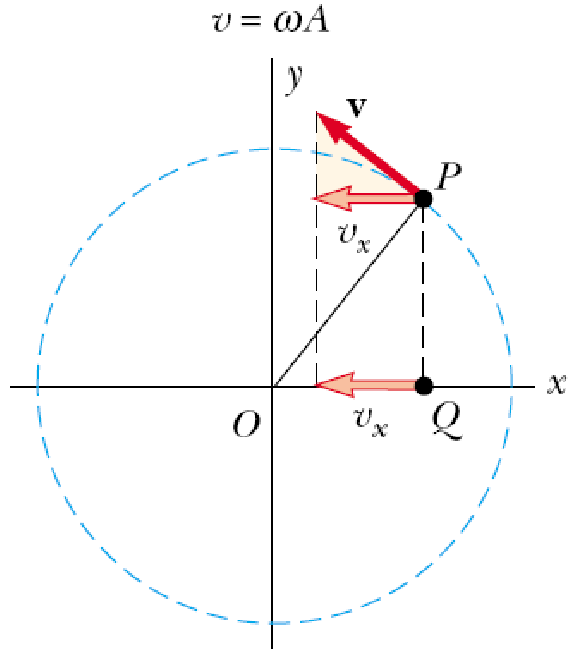
Harmonijski oscilator i kružno gibanje

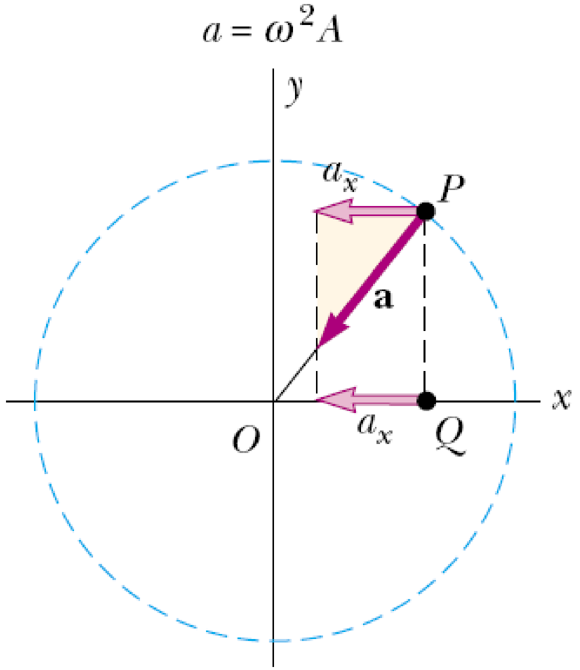




$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

Harmonijski oscilator i kružno gibanje

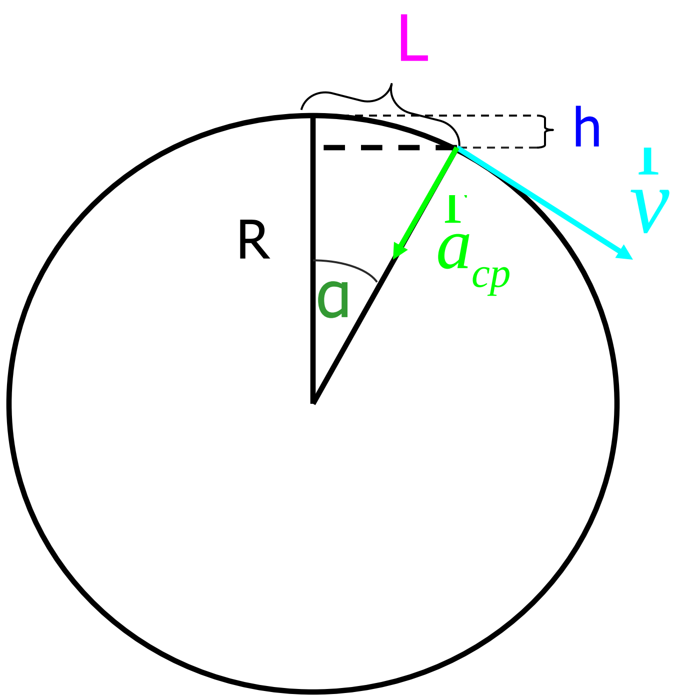




$$v_x = -\omega A \sin(\omega t + \phi)$$

$$a_x = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi)$$

Akceleracija tijela koje se giba po kružnici (sila je okomita na brzinu)



$$h = R - R\cos\alpha = R\left(1-\cos\alpha\right)$$

$$\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \ldots$$

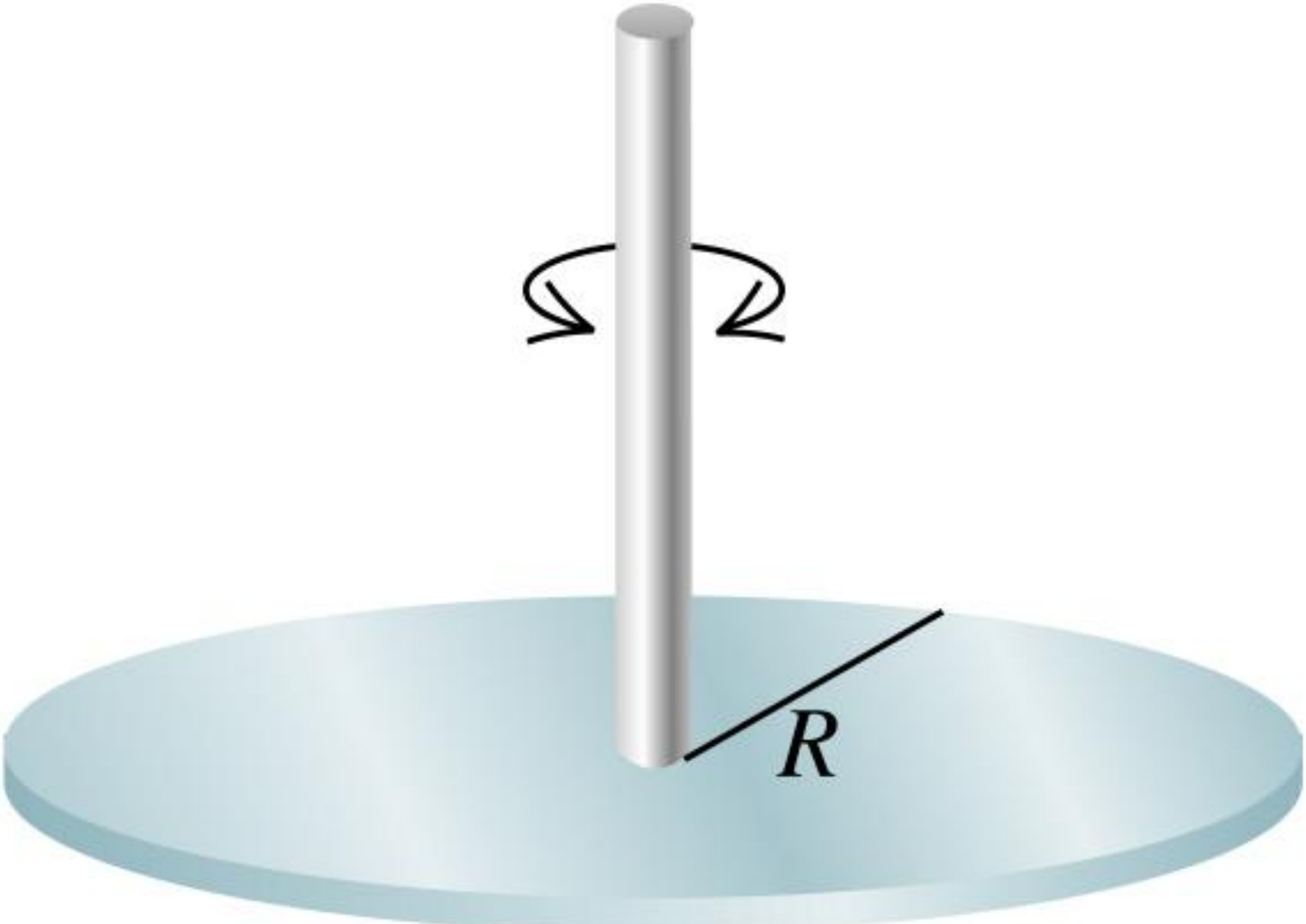
$$\alpha \to 0 \Rightarrow \cos\alpha \approx 1 - \frac{\alpha^2}{2}$$

$$L = v\Delta t = R\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{v\Delta t}{r}$$

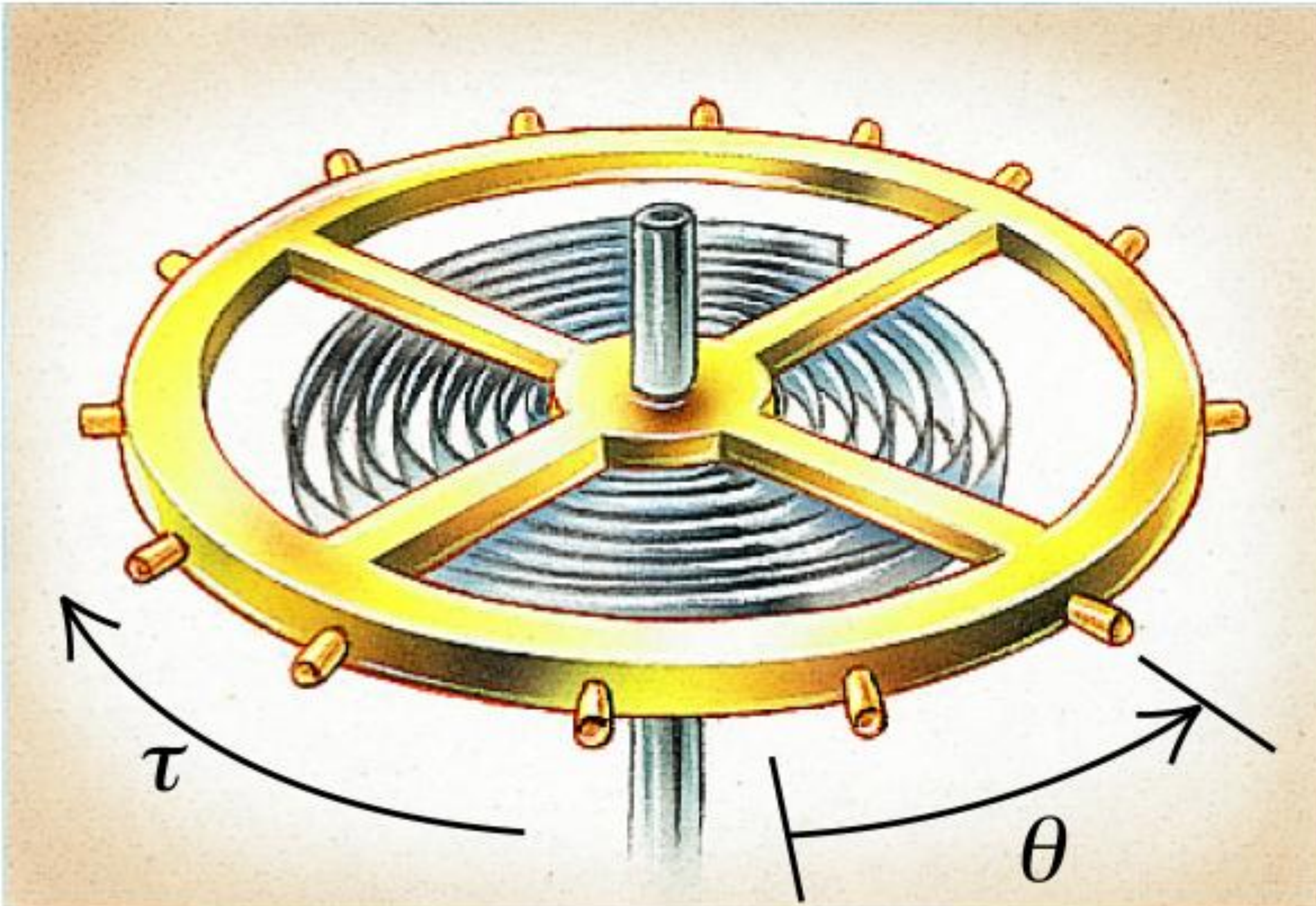
$$\Delta t \to 0 \Rightarrow h = R\left(1-1+\frac{\alpha^2}{2}\right) = \frac{v^2\Delta t^2}{2R}$$

$$a = \frac{d^2h}{dt^2} = \frac{v^2}{R}$$

Torziono njihalo



Torziono njihalo

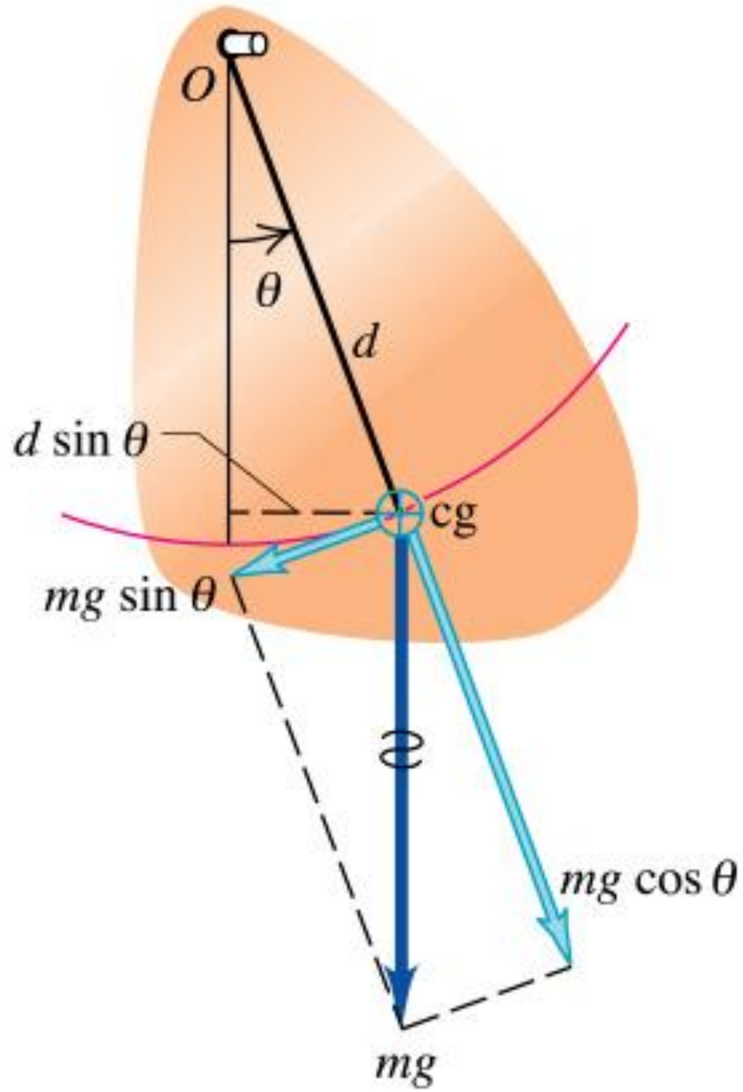


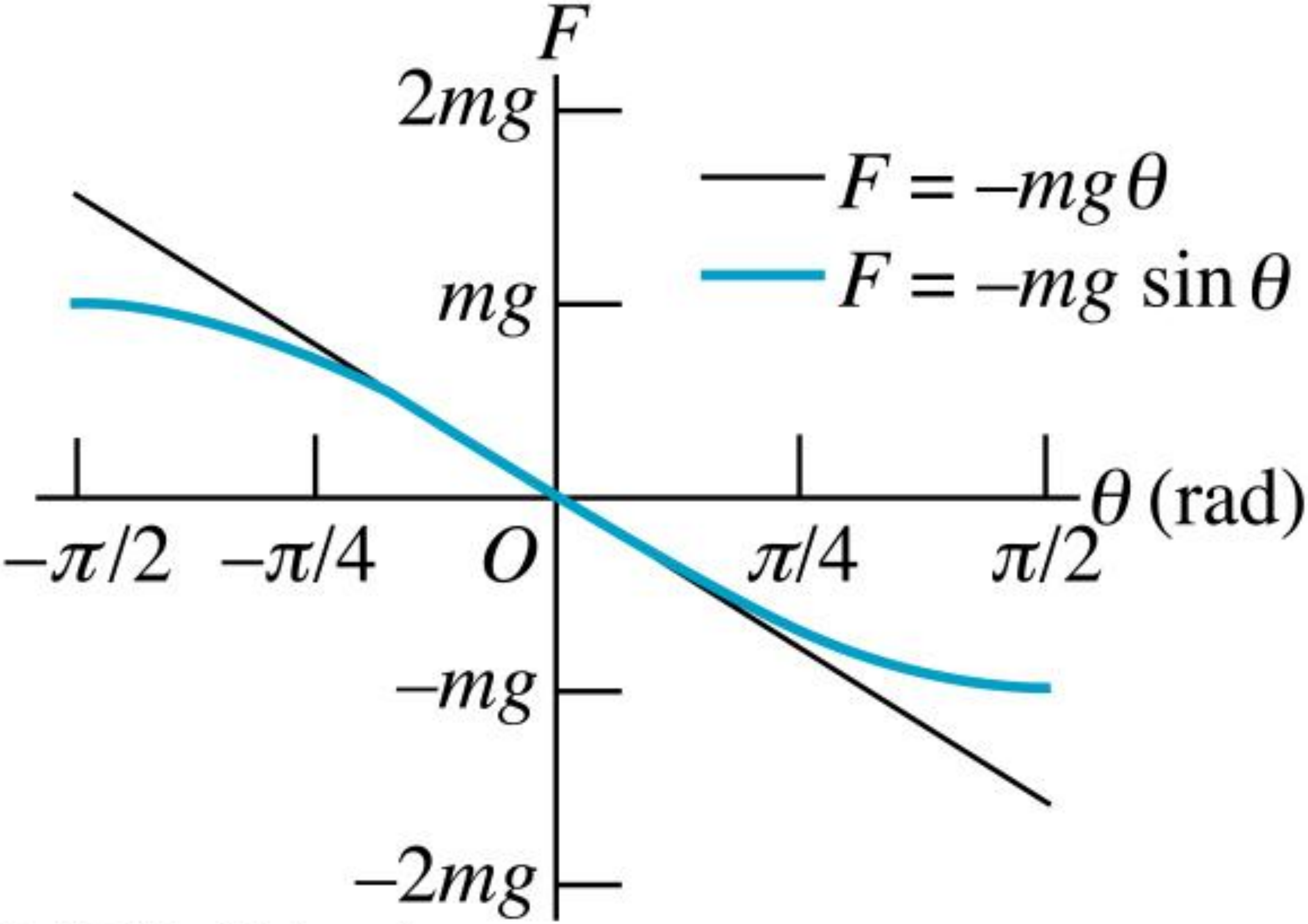
Torziono njihalo

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2} + D_t\varphi = 0$$

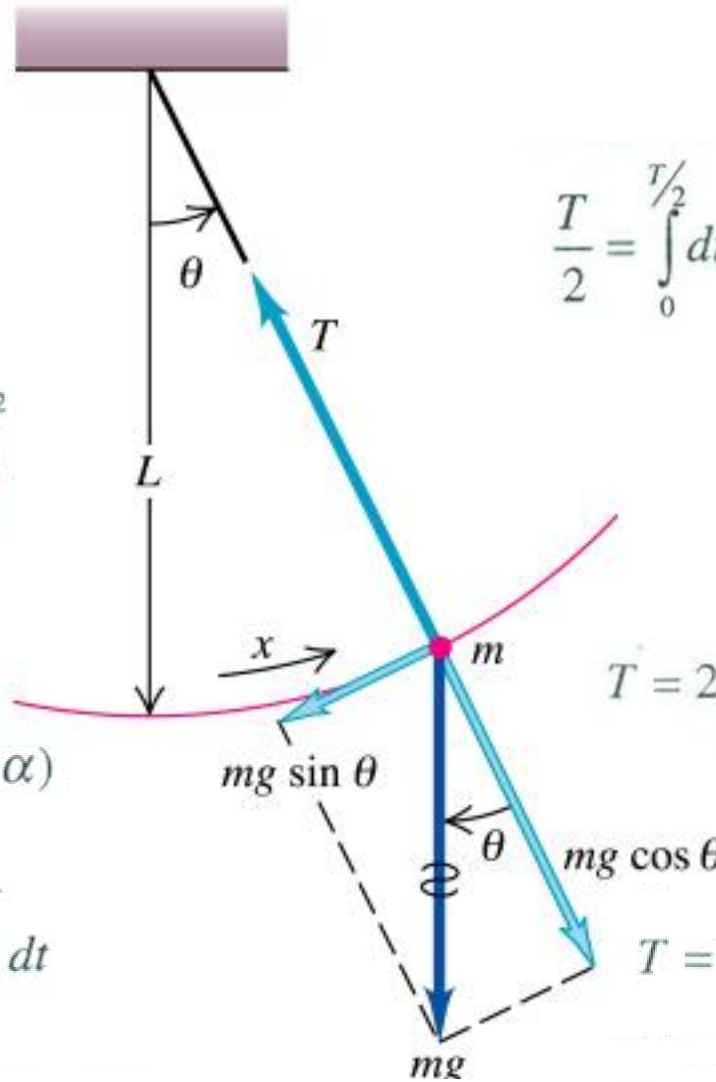
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{D_t}} = \frac{2\pi}{R^2}\sqrt{\frac{2IL}{\pi G}}$$


O
θ
d
d sin θ
cg
mg sin θ
mg cos θ
mg



F
$2mg$
mg
$-mg$
$-2mg$
$F = -mg\theta$
$F = -mg \sin\theta$
θ (rad)
$-\pi/2$
$-\pi/4$
O
$\pi/4$
$\pi/2$

Matematičko njihalo



$$E_{uk} = E_k + E_p = konst$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m l^2 \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^2$$

$$E_p = mgl(1 - \cos\varphi)$$

$$E_{uk} = E_{p\,\max} = mgl(1 - \cos\alpha)$$

$$d\varphi = \sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\alpha)}\; dt$$

$$\frac{T}{2} = \int_0^{T/2} dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\frac{2g}{l}(\cos\varphi - \cos\alpha)}}$$

$$\cos\varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + ..$$

$$T = 2\sqrt{\frac{l}{g}} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \varphi^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

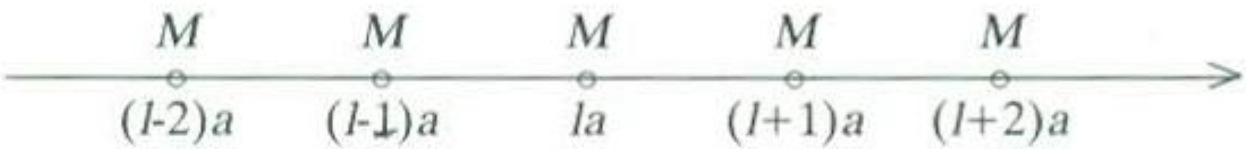
Velike amplitude

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot K(k) \qquad k = \sin(\alpha / 2)$$

$$K(k) = -\frac{\pi}{2} \int_0^{\pi/2} \left(1 - k^2 \sin^2\psi\right)^{-1/2} d\psi \quad K(k) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{k^2}{4} + \cdots\right) \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cdots\right)$$

Titranje atoma u kristalima

$$x_l = la + u_l \, .$$



1. Pretpostavljamo da međuatomske sile imaju kratak doseg, pa uzimamo u obzir samo međudjelovanje prvih susjeda.
2. Pretpostavljamo da je potencijalna energija sustava kvadratna funkcija atomskih pomaka iz ravnotežnih položaja.

$$U_p = \frac{\beta}{2}\left[(u_1 - u_2)^2 + (u_2 - u_3)^2 + \ldots\right] = \frac{\beta}{2}\sum_l (u_l - u_{l+1})^2$$

parametar β određuje jakost međuatomske veze

Titranje atoma u kristalima

Sila je jednaka negativnoj derivaciji potencijalne energije po koordinati promatranog atoma:

$$-\frac{\partial U_p}{\partial u_l} = -\beta\left[(u_l - u_{l-1}) + (u_l - u_{l+1})\right]$$

slijedi jednadžba gibanja l-tog atoma

$$M\ddot{u}_l = -\beta(2u_l - u_{l-1} - u_{l+1}) \quad .$$

$$u_l = A\,\mathrm{e}^{i(kla - \omega t)} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \omega = v_o\,k$$

$$M\omega^2 = 2\beta\,(1 - \cos ka)$$

Titranje atoma u kristalima

Uvažavanjem trigonometrijske relacije

$$1 - \cos ka = 2\sin^2 \frac{ka}{2}$$

$$\omega(k) = \omega_m \left| \sin \frac{ka}{2} \right|$$

gdje smo definirali frekvenciju

$$\omega_m = 2\sqrt{\frac{\beta}{M}} \qquad \omega_m = \frac{2\, v_o}{a}$$

Po redu veličine jest $v_o \approx 10^5$ cm/s i $a \approx 10^{-8}$ cm, odakle proizlazi $\omega_m \approx 10^{13}$ Hz

Titranje atoma u kristalima

Kristalnu rešetku smatramo kontinuiranim sredstvom

$$u_{l\pm 1} = u(x,t) \pm a \frac{\partial\, u(x,t)}{\partial\, x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2\, u(x,t)}{\partial\, x^2}$$

$$M \ddot{u}_l = -\beta(2u_l - u_{l-1} - u_{l+1})$$

Slijedi valna jednadžba

$$\frac{\partial^2\, u}{\partial\, t^2} = \frac{\beta\, a^2}{M} \frac{\partial^2\, u}{\partial\, x^2}$$

To je poznata valna jednadžba

$$\frac{\partial^2\, u}{\partial\, t^2} = v_o^2 \frac{\partial^2\, u}{\partial\, x^2} \qquad v_o = a\sqrt{\frac{\beta}{M}}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \omega = v_o\, k$$

$$\omega_m = \frac{2\, v_o}{a}$$

Titranje atoma u kristalima

$$\omega_m = \frac{2\, v_o}{a}$$

translacijom valnog broja za $2\pi/a$

$$k \to k + \frac{2\pi}{a}$$

frekvencija titranja ostaje nepromijenjena:

$$\omega\left(k + \frac{2\pi}{a}\right) = \omega_m \left| \sin\left(\frac{ka}{2} + \pi\right) \right| = \omega(k)$$

Frekvencija je periodična funkcija valnog broja s periodom $2\pi/a$

Titranje atoma u kristalima

$$g_n = \frac{2\pi n}{a} \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

k i k' Ekvivalentne ako je njihova udaljenost jednaka

$$k' - k = g_n$$

Tim su točkama pridružene iste frekvencije:

$$\omega\,(k + g_n) = \omega\,(k)$$

Grupna brzina valova određena je izrazom

$$v(k) = \frac{\mathrm{d}\,\omega}{\mathrm{d}\,k} \qquad v(k) = a\sqrt{\frac{\beta}{M}}\left|\cos\frac{ka}{2}\right|$$

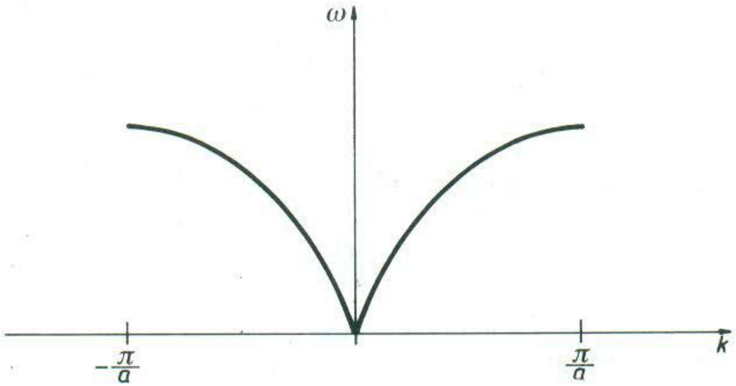
$$v(0) = a\sqrt{\frac{\beta}{M}}$$

Titranje atoma u kristalima

Frekvencija titranja kristalne rešetke određena je umnoškom valnog broja i međuatomskog razmaka, pa u graničnoj vrijednosti za $k \to 0$ i $a \to 0$ vrijede isti rezultati. Relacije izvedene primjenom aproksimacije elastičnog kontinuuma ostat će približno valjane ako je ispunjen uvjet

$$ka << 1 \qquad \lambda >> a$$

$$\sin\frac{ka}{2} = \frac{ka}{2} + \dots$$



Grafički prikaz disperzivne relacije

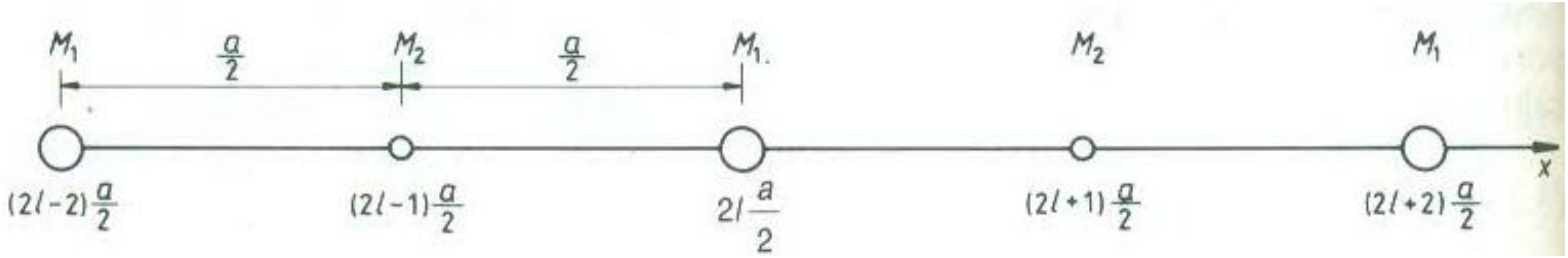
približno dobivamo

$$\omega(k) = ak\sqrt{\frac{\beta}{M}} = v_o\,k \qquad ka << 1$$

Titranje atoma u kristalima

Linearna rešetka s dva atoma u elementarnoj ćeliji

$$M_1 > M_2$$



$$M_1\ \ddot{u}_{2l} = -\beta\left[(u_{2l} - u_{2l-1}) - (u_{2l} - u_{2l+1})\right]$$

$$M_2\ \ddot{u}_{2l+1} = -\beta\left[(u_{2l+1} - u_{2l}) - (u_{2l+1} - u_{2l+2})\right]$$

$$u_n = A\,e^{i\left(k n \frac{a}{2} - \omega t\right)} \quad n=2l,\ 2l+2,\ldots \quad u_n = B\,e^{i\left(k n \frac{a}{2} - \omega t\right)} \quad n=2l-1,\ 2l+1,\ldots$$

Titranje atoma u kristalima

Linearna rešetka s dva atoma u elementarnoj ćeliji

$$A\,(M_1\,\omega^2 - 2\beta) + 2\beta\,B\cos\frac{ka}{2} = 0$$

$$2\beta\,A\cos\frac{ka}{2} + B\,(M_2\,\omega^2 - 2\beta) = 0$$

Proizlazi kvadratna jednadžba

$$(M_1\,\omega^2 - 2\beta)\,(M_2\,\omega^2 - 2\,\beta) = 4\beta^2\cos^2\frac{ka}{2}$$

Njezino je rješenje

$$\omega_\pm^2(k) = \beta\,\frac{M_1 + M_2}{M_1\,M_2}\left[1 \pm \sqrt{1 - 4\,\frac{M_1\,M_2}{(M_1 + M_2)^2}\sin^2\frac{ka}{2}}\,\right]$$

Titranje atoma u kristalima

Linearna rešetka s dva atoma u elementarnoj ćeliji

Titranje kristalne rešetke opisuju dvije disperzivne relacije. Valnom broju k pridružene su frekvencije $\omega_+ (k)$ i $\omega_- (k)$.

$$\omega_+^2 (k) + \omega_-^2 (k) = 2\beta \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2}$$

Disperzivna relacija pokazuje da je frekvencija titranja invarijantna prema translacijama valnog broja za višekratnik osnovne veličine $2\pi/a$. Zamjenom

$$k \rightarrow k + \frac{2\pi n}{a} \qquad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

frekvencija titranja ostaje nepromijenjena:

$$\omega \left(k + \frac{2\pi}{a} n\right) = \omega (k) \, .$$

Stoga valni broj ograničavamo na prvu Brillouinovu zonu:

$$-\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{\pi}{a} \, .$$

Titranje atoma u kristalima

Linearna rešetka s dva atoma u elementarnoj ćeliji

Akustička frekvencija

$$\omega_-^2(k) = k^2 \frac{\beta a^2}{2(M_1 + M_2)} + \ldots \quad ka << 1$$

$$v_0 = a\sqrt{\frac{\beta}{2(M_1 + M_2)}}$$

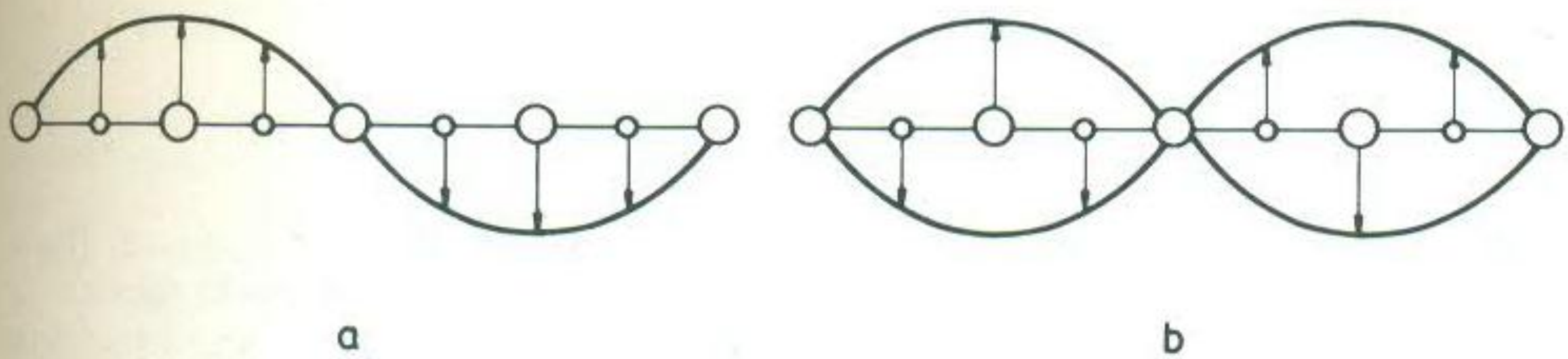
$M_1 = M_2 = M$ tada duljina ćelije postaje dvaput manja, tj. umjesto $a/2$ valja pisati a

$$v_0 = a\sqrt{\frac{\beta}{M}}$$

Ekvivalentno rezultatu ćelije s jednim atomom

Titranje atoma u kristalima

Linearna rešetka s dva atoma u elementarnoj ćeliji



Slika (a) akustičko i (b) optičko titranje atoma u kristalu s dva atoma u elementarnoj ćeliji

Titranje atoma u kristalima

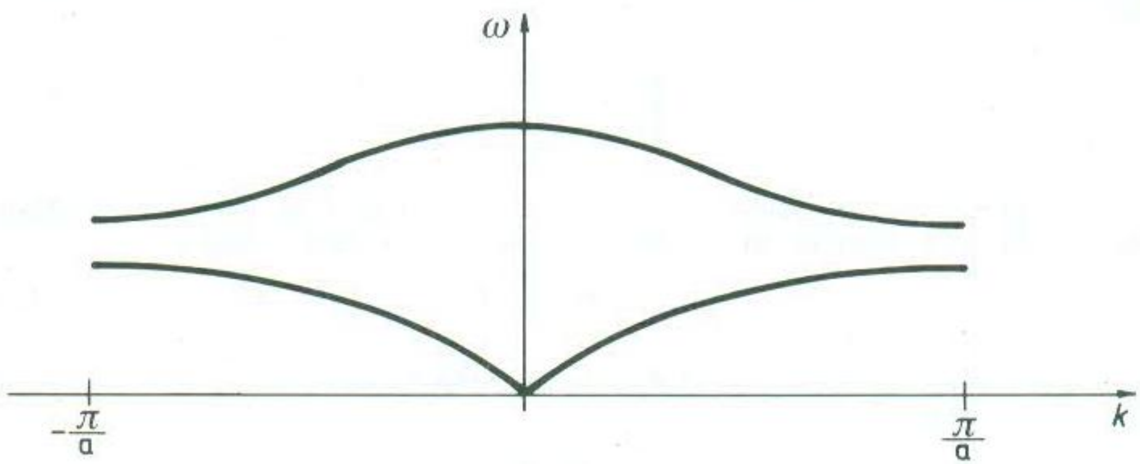
Linearna rešetka s dva atoma u elementarnoj ćeliji

Ovisnost optičke grane frekvencije o valnom broju

$$\omega_+^2(0) = 2\beta \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} \qquad \omega_+(0) = \frac{2v_o}{a} \frac{M_1 + M_2}{\sqrt{M_1 M_2}}$$

$$\omega_+^2\left(\pm\frac{\pi}{a}\right) = \frac{2\beta}{M_2}$$

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{2\beta}{M_2}} \quad M_1 >> M_2$$



Grafički prikaz disperzivne relacije

Titranje atoma u kristalima

Linearna rešetka s dva atoma u elementarnoj ćeliji

Razmatrajući jednodimenzionalan model, zaključili smo da u jednoatomskoj rešetki postoji jedan oblik, a u dvoatomskoj dva oblika titranja atoma. Kada bi elementarna ćelija sadržavala n atoma, tada bi rešetka mogla titrati na n različitih načina. Dakako, u trodimenzionalnom kristalu broj titranja triput je veći. Za svaki smjer širenja vala postoje tri međusobno okomita titranja. U realnom kristalu svakom valnom vektoru pripada $3n$ frekvencija. Od njih su tri frekvencije akustičke, a preostale frekvencije su optičke. Razumije se, u jednoatomskim rešetkama nema optičkog titranja, pa preostaje samo akustičko titranje.

Tjerani oscilator

Tjerani harmonički oscilator od harmoničkog oscilatora se razlikuje po tome što na njega djeluje vanjska sila.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F(t).$$

Vanjska sila može imati različite funkcijske ovisnosti o vremenu. Prvo ćemo promatrati najjednostavniji primjer, pretpostavit ćemo da je sila oscilatorna:

$$F(t) = F_0 \cos \omega t$$

Treba primijetit da ω nije isto što i ω_0. sada ćemo probati riješiti jednadžbu (1) uvrštavajući u nju jednadžbu (2) i dobivamo jedinstveno rješenje:

Tjerani oscilator

$$x = C\cos\omega t$$

gdje je C konstanta koju moramo odrediti, a zatim ćemo u jednadžbu (1) uvrstiti dobiveno rješenje i dobit ćemo jednadžbu oblika:

$$-m\omega^2 C\cos\omega t = -m\omega_0^2 C\cos\omega t + F_0\cos\omega t$$

Sređivanjem te jednadžbe za konstantu *C* dobivamo:

$$C = \frac{F_0}{m\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}$$

Tjerani prigušeni oscilator

$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2}+C\frac{d\varphi}{dt}+D\varphi=M_v\cos\omega_v t$$

$$\varphi(t)=\varphi_v\cos(\omega_v t-\alpha)$$

$$I\omega_v^2\varphi_v\cos(\omega_v t-\alpha)-C\omega_v\varphi_v\sin(\omega_v t-\alpha)+$$
$$+D\varphi_v\cos(\omega_v t-\alpha)=M_v\cos\omega_v t$$

$$[-I\omega_v^2\cos\alpha+C\omega_v\sin\alpha+D\cos\alpha]\varphi_v\cos\omega_v t+$$
$$+[-I\omega_v^2\sin\alpha-C\omega_v\cos\alpha+D\sin\alpha]\varphi_v\sin\omega_v t=M_v\cos\omega_v t$$

$$[-I\omega_v^2\cos\alpha+C\omega_v\sin\alpha+D\cos\alpha]\varphi_v=M_v$$
$$[-I\omega_v^2\sin\alpha-C\omega_v\cos\alpha+D\sin\alpha]\varphi_v=0\,.$$

Vrijedi za svaki t

Tjerani prigušeni oscilator

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{C\omega_v}{D - I\omega_v^2} = \frac{2\delta\omega_v}{\omega_0^2 - \omega_v^2}$$

$$\varphi_v = \frac{M_v}{(D - I\omega_v^2)\cos\alpha + C\omega_v \sin\alpha} =$$

$$= \frac{M_v}{I\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_v^2)^2 + 4\delta^2\omega_v^2}} \quad ,$$

Slučaj rezonancije $\varphi_v = \dfrac{M_v}{2I\delta\omega_0}$.

Možemo naći širinu rezonancije ako postavimo uvjet

$$\left(\omega_0^2 - \omega_v^2\right)^2 = 4\delta^2\omega_v^2 \qquad \Delta\omega = \delta$$

Tjerani prigušeni oscilator

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=F_0\cos\omega t.$$

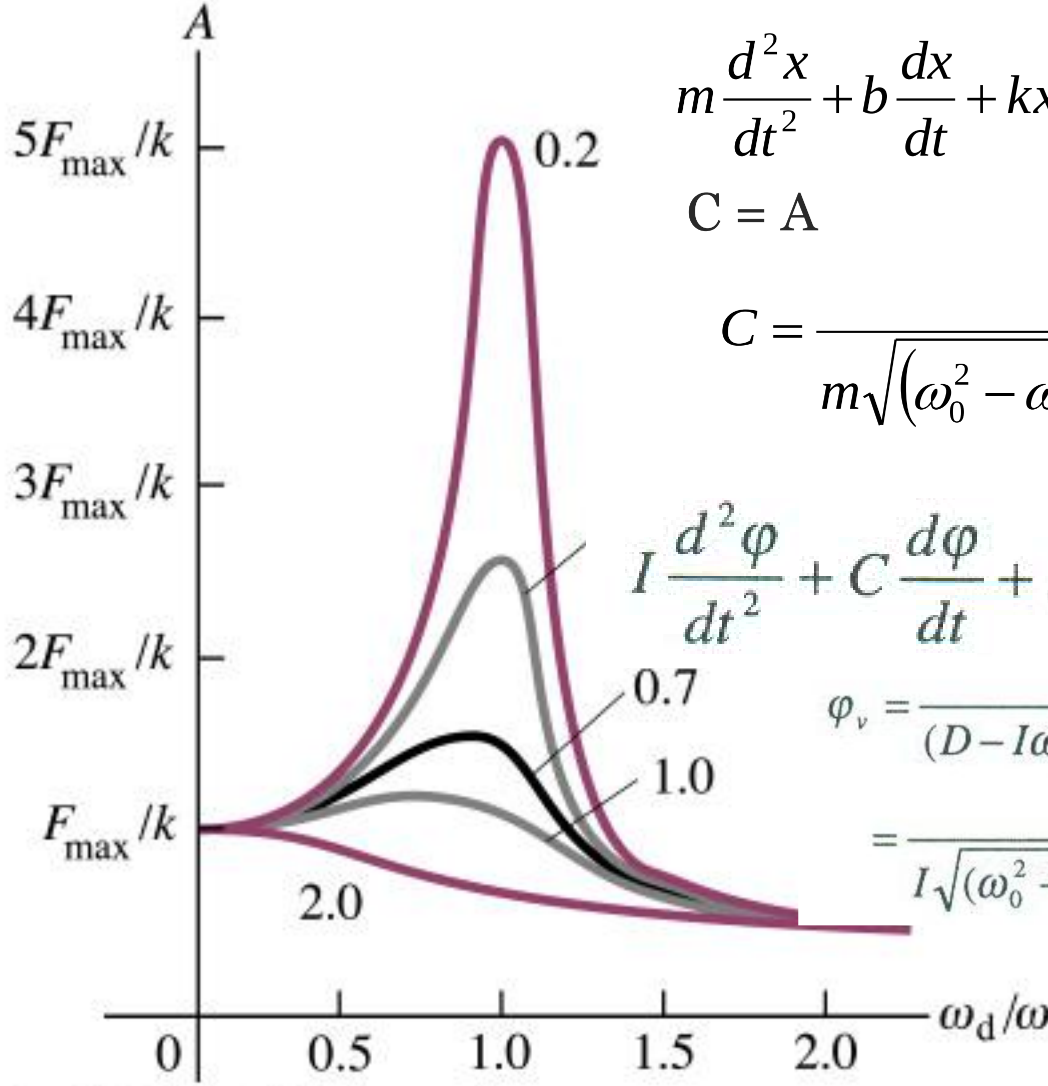
C = A

$$C=\frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+(b/m)^2\omega^2}}$$

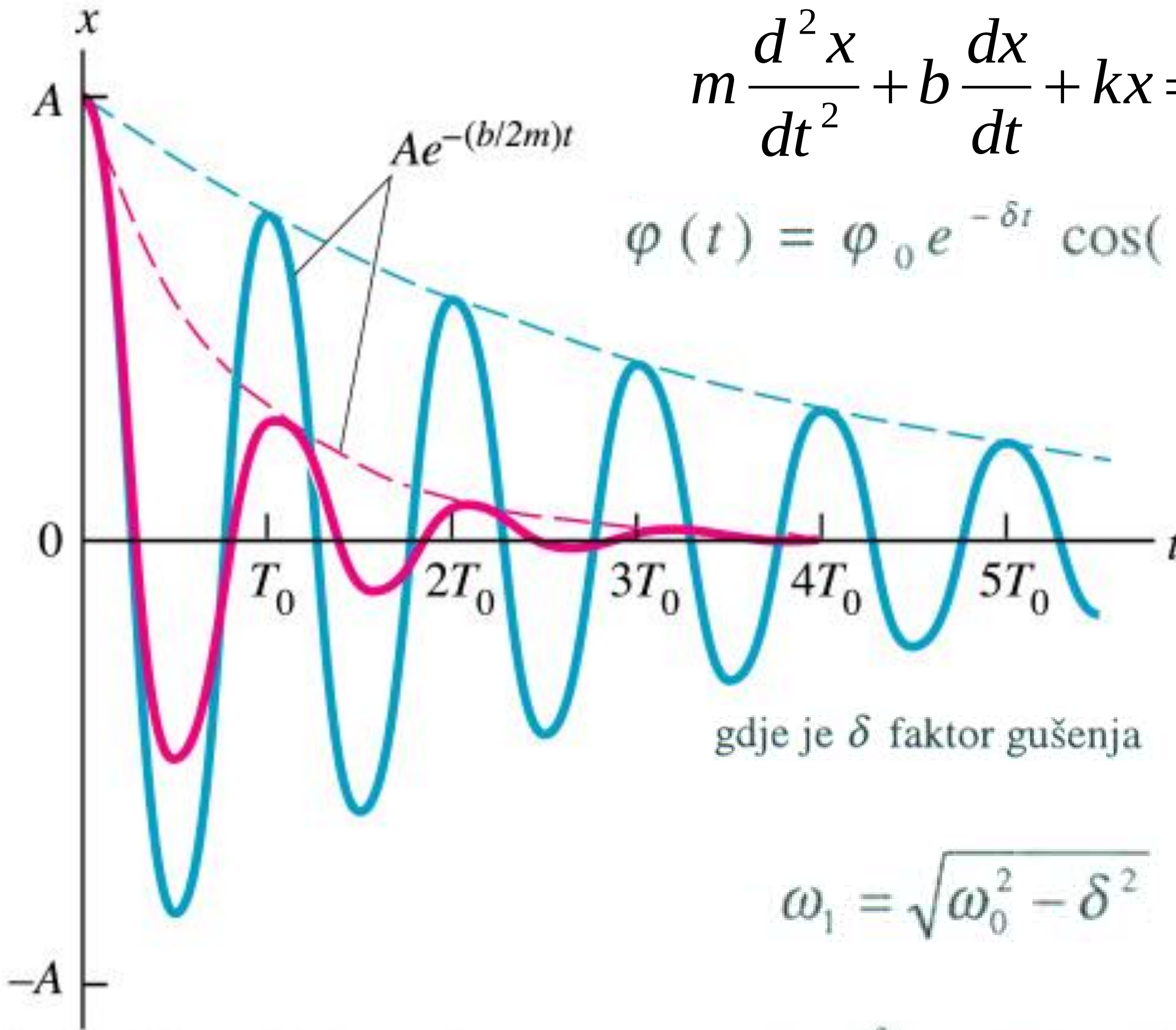
$$I\frac{d^2\varphi}{dt^2}+C\frac{d\varphi}{dt}+D\varphi=M_v\cos\omega_v t$$

$$\varphi_v=\frac{M_v}{(D-I\omega_v^2)\cos\alpha+C\omega_v\sin\alpha}=$$

$$=\frac{M_v}{I\sqrt{(\omega_0^2-\omega_v^2)^2+4\delta^2\omega_v^2}}\quad,$$



Gušeni harmonički oscilator



$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=0.$$

$$\varphi(t)=\varphi_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_1 t-\psi)$$

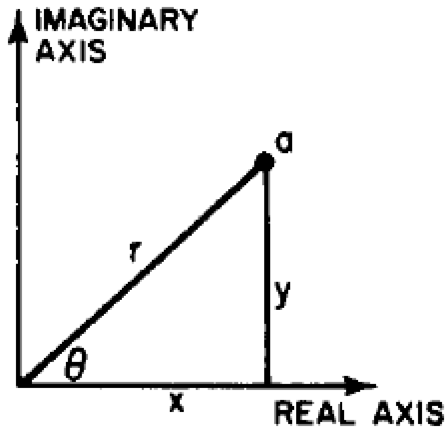
gdje je δ faktor gušenja

$$\delta=\frac{C}{2I}$$

$$\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$$

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}}=\frac{\varphi_0 e^{-\delta t_n}\cos(\omega_1 t_n-\psi)}{\varphi_0 e^{-\delta(t_n+T)}\cos(\omega_1 t_n+\omega_1 T-\psi)}=e^{\delta T}$$

Kompleksni brojevi i harmonijsko gibanje



$$a = a_r + ia_i$$

$$a = x + iy$$

$$x + iy = re^{i\theta}$$

$$r^2 = x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = aa^*$$

$$x + iy, r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = y/x$$

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t.$$

Kompleksni brojevi i harmonijsko gibanje

$$F = F_0 \cos \omega t; \quad F = F_0 e^{i\omega t}; \quad e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t.$$

$$F = F_0 e^{-i\Delta} e^{i\omega t} = \hat{F} e^{i\omega t}. \quad \hat{F} = F_0 e^{-i\Delta}.$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = \frac{F}{m} = \frac{F_0}{m} \cos \omega t$$

$$\frac{d^2(x_r + ix_i)}{dt^2} + \frac{k(x_r + ix_i)}{m} = \frac{F_r + iF_i}{m}$$

$$\frac{d^2x_r}{dt^2} + \frac{kx_r}{m} + i\left(\frac{d^2x_i}{dt^2} + \frac{kx_i}{m}\right) = \frac{F_r}{m} + \frac{iF_i}{m}$$

Kompleksni brojevi i harmonijsko gibanje

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{kx}{m} = \frac{\hat{F}e^{i\omega t}}{m}$$

$$(i\omega)^2\hat{x} + (k\hat{x}/m) = \hat{F}/m$$

$$d(\hat{x}e^{i\omega t})/dt = i\omega\hat{x}e^{i\omega t}$$

$$\hat{x} = \frac{\hat{F}/m}{(k/m) - \omega^2}$$

$$\hat{x} = \hat{F}/m(\omega_0^2 - \omega^2)$$

Prisilni i gušeni harmonički oscilator

$$m(d^2x/dt^2) + c(dx/dt) + kx = F$$

$$c = m\gamma$$

$$k = m\omega_0^2$$

$$(d^2x/dt^2) + \gamma(dx/dt) + \omega_0^2 x = F/m$$

$$[(i\omega)^2\hat{x} + \gamma(i\omega)\hat{x} + \omega_0^2\hat{x}]e^{i\omega t} = (\hat{F}/m)e^{i\omega t}$$

$$\hat{x} = \hat{F}/m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)$$

Prisilni i gušeni harmonički oscilator

$$\hat{x} = \hat{F}/m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)$$

$$R = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$

$$\hat{x} = \hat{F}R$$

$$R = \rho e^{i\theta}$$

$$\hat{x} = R\hat{F} = \rho e^{i\theta} F_0 e^{i\Delta} = \rho F_0 e^{i(\theta + \Delta)}$$

Prisilni i gušeni harmonički oscilator

$$\hat{x} = R\hat{F} = \rho e^{i\theta} F_0 e^{i\Delta} = \rho F_0 e^{i(\theta + \Delta)}$$

$$x = \rho F_0 \cos(\omega t + \Delta + \theta)$$

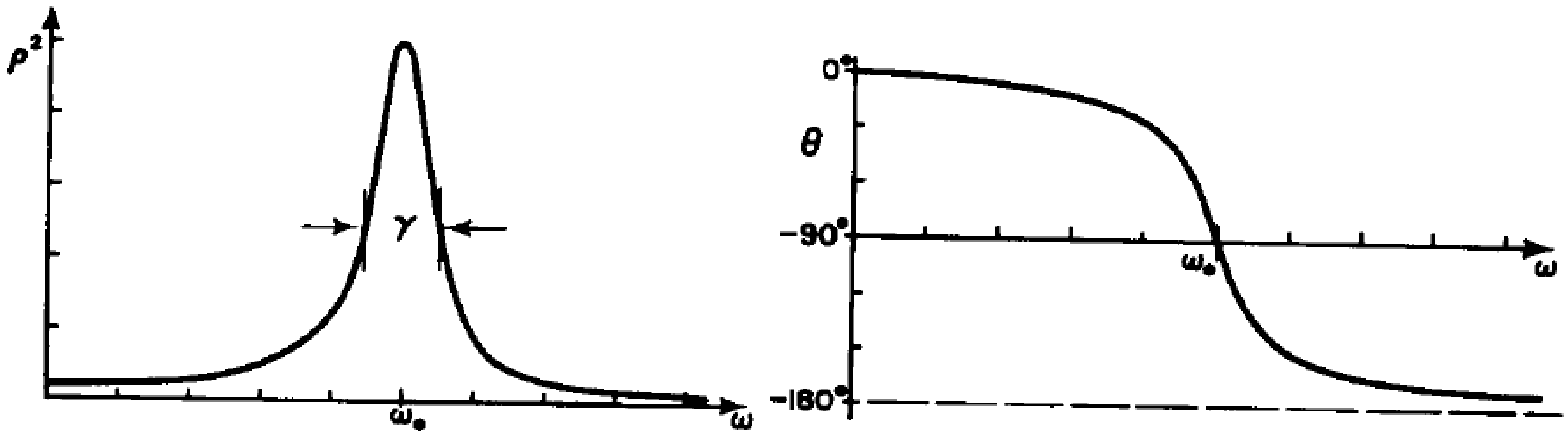
$$\rho^2 = \frac{1}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}$$

$$= \frac{1}{m^2[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2]}.$$

$$1/R = 1/\rho e^{i\theta} = (1/\rho)e^{-i\theta} = m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)$$

$$\tan\theta = -\gamma\omega/(\omega_0^2 - \omega^2).$$

Prisilni i gušeni harmonički oscilator

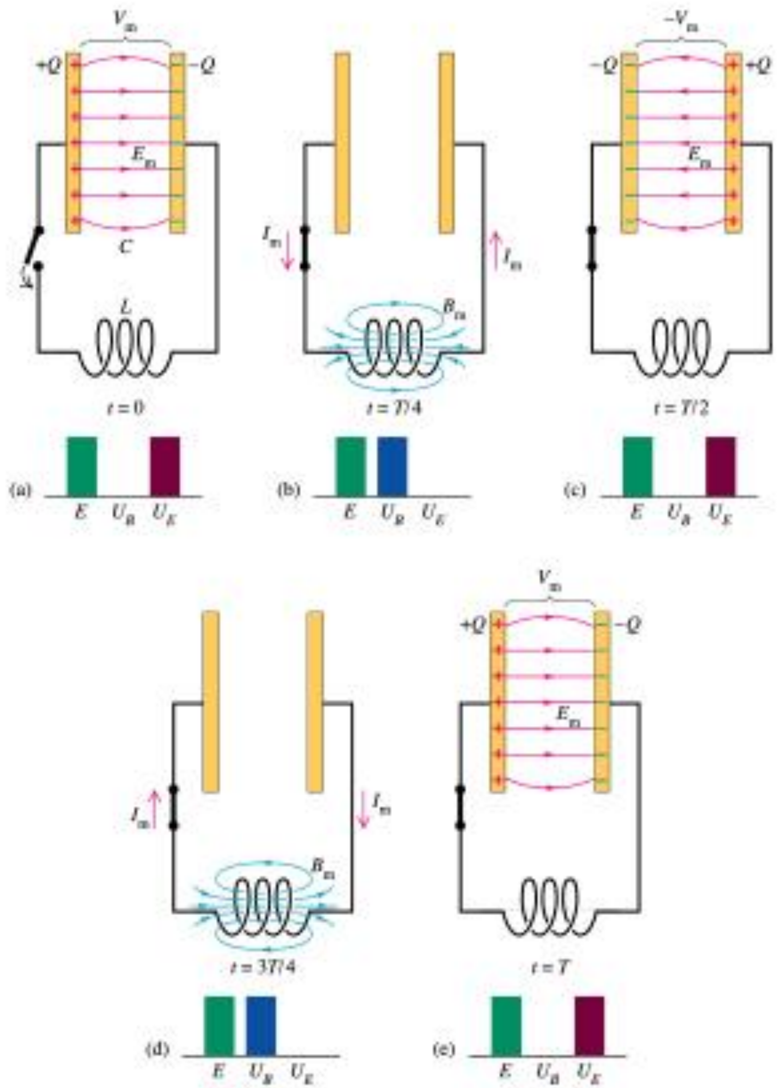


$$\rho^2 = \frac{1}{m^2(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}$$

$$= \frac{1}{m^2[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2]} .$$

$$\tan\theta = -\gamma\omega/(\omega_0^2 - \omega^2),$$

Električni titrajni krug

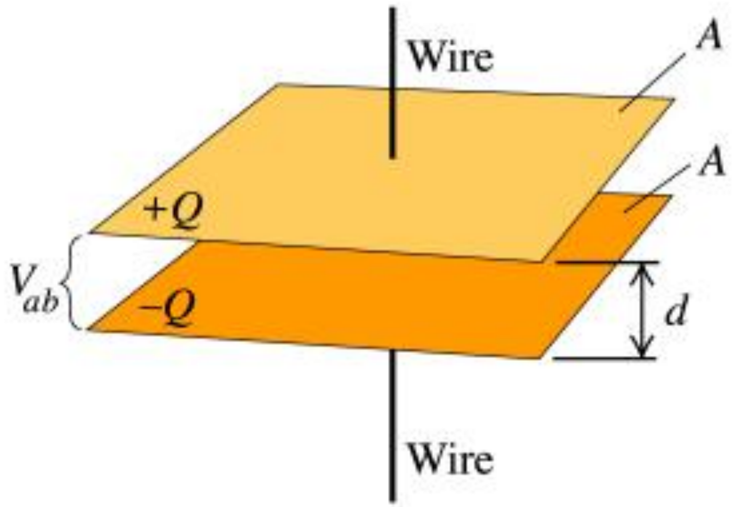


Električni titrajni krug

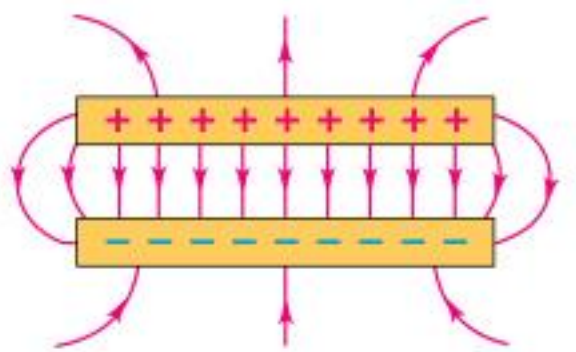
$$ES = \frac{q}{\varepsilon_0};\ \ E = \frac{\sigma S}{S\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

$$C = \frac{q}{U} = \frac{\sigma S}{Ed} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$$

$$V = \sigma d/\epsilon_0 = qd/\epsilon_0 A$$

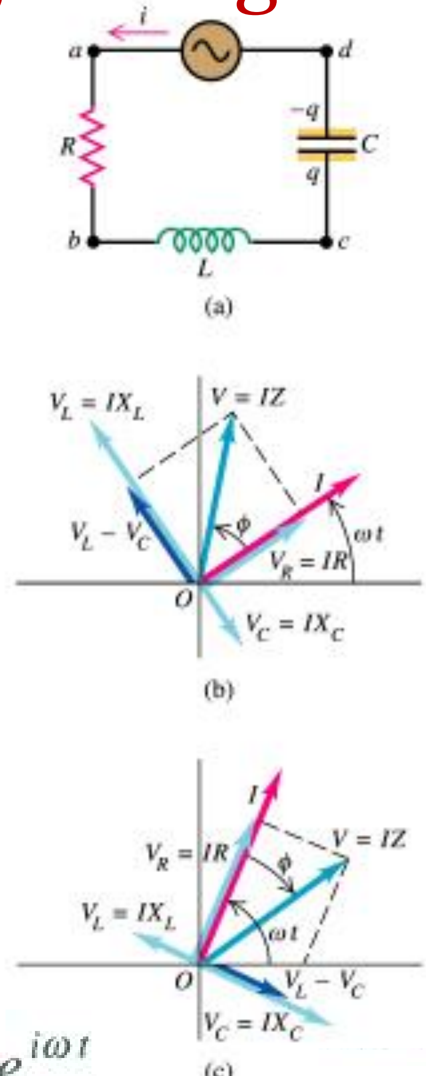


(a)



(b)

Električni titrajni krug



Addison Wesley

$$V(t) = V_0 \cos \omega t$$

$$V(t) - RI - L\frac{dI}{dt} - \frac{Q}{C} = 0$$

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

$$I(t) = I_0 e^{i\omega t}$$

$$V(t) = V_0 e^{i\omega t}$$

$$L\frac{d^2 I}{dt^2} + R\frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = i\omega V_0 e^{i\omega t}$$

$$-\omega^2 L I_0 + i\omega R I_0 + \frac{1}{C} I_0 = i\omega V_0$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\omega \mathrm{L} - \frac{1}{\omega \mathrm{C}}}{\mathrm{R}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$I_0 = \frac{|V_0|}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

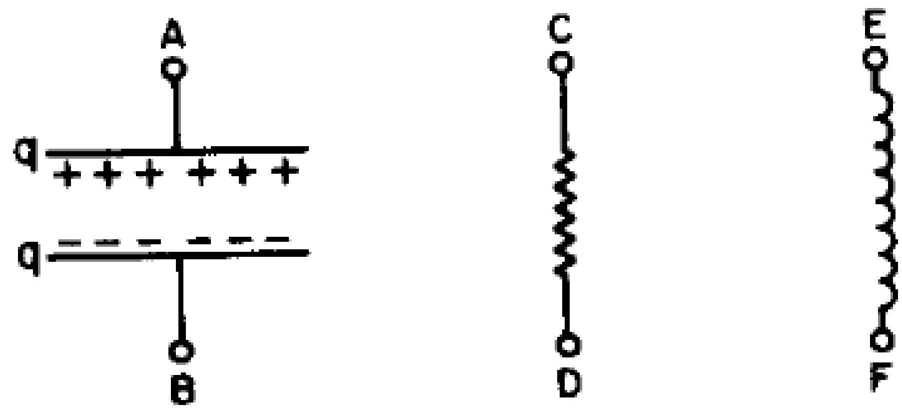
$$V_0 = \left(R + i\omega L - i\frac{1}{\omega C}\right) I_0$$

Električni titrajni krug

$$V = \sigma d/\epsilon_0 = qd/\epsilon_0 A$$

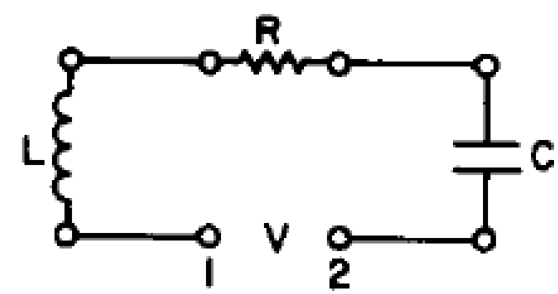
$$V = RI = R\,dq/dt$$

$$V = L\,dI/dt = L\,d^2q/dt^2$$



$$\boxed{m(d^2x/dt^2) + c(dx/dt) + kx = F}$$

$$L\,d^2q/dt^2 + R\,dq/dt + q/C = V(t)$$



Električni titrajni krug

$$\left[L(i\omega)^2 + R(i\omega) + \frac{1}{C}\right]\hat{q} = \hat{V}$$

$$q = \frac{\hat{V}}{L(i\omega)^2 + R(i\omega) + \frac{1}{C}}$$

$$\hat{q} = \hat{V}/L(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega),$$

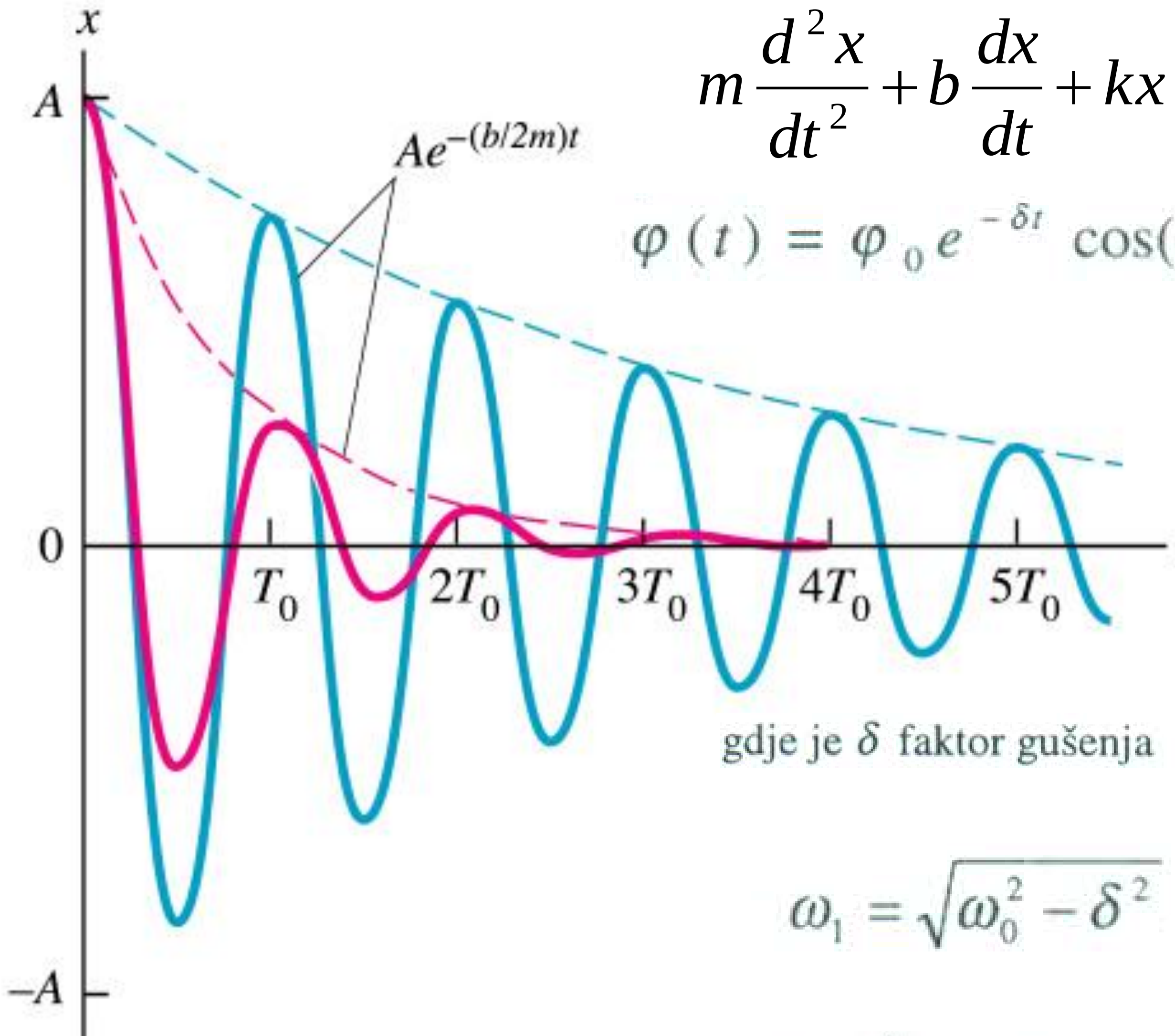
$$\omega_0^2 = 1/LC \qquad \gamma = R/L$$

Električni titrajni krug

General characteristic	Mechanical property	Electrical property
indep. variable	time (t)	time (t)
dep. variable	position (x)	charge (q)
inertia	mass (m)	inductance (L)
resistance	drag coeff. ($c = \gamma m$)	resistance ($R = \gamma L$)
stiffness	stiffness (k)	(capacitance)$^{-1}$ ($1/C$)
resonant frequency	$\omega_0^2 = k/m$	$\omega_0^2 = 1/LC$
period	$t_0 = 2\pi\sqrt{m/k}$	$t_0 = 2\pi\sqrt{LC}$
figure of merit	$Q = \omega_0/\gamma$	$Q = \omega_0 L/R$

Gušeni harmonički oscilator

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=0.$$



$$\varphi(t)=\varphi_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_1 t-\psi)$$

gdje je δ faktor gušenja

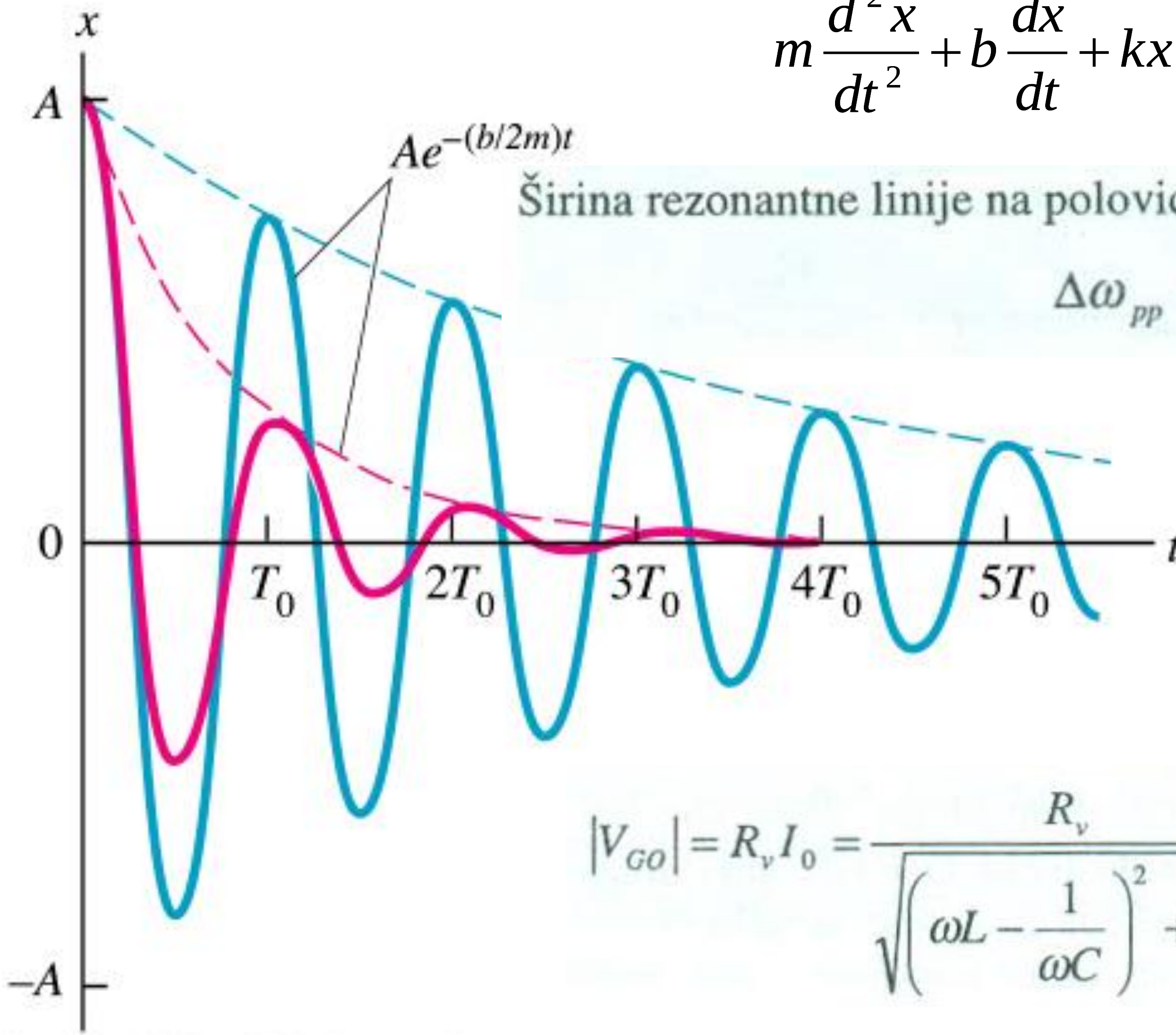
$$\delta=\frac{C}{2I}$$

$$\omega_1=\sqrt{\omega_0^2-\delta^2}$$

$$\frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}}=\frac{\varphi_0 e^{-\delta t_n}\cos(\omega_1 t_n-\psi)}{\varphi_0 e^{-\delta(t_n+T)}\cos(\omega_1 t_n+\omega_1 T-\psi)}=e^{\delta T}$$

Gušeni harmonički oscilator

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+b\frac{dx}{dt}+kx=0.$$



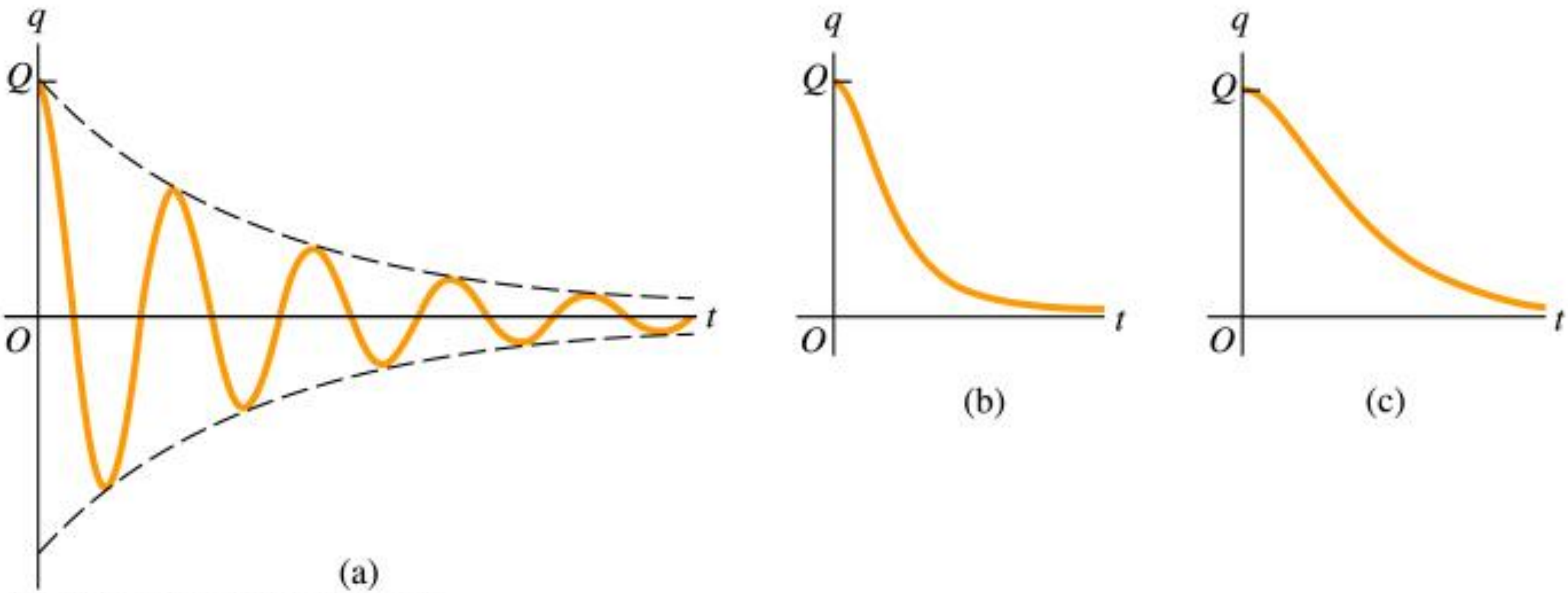
Širina rezonantne linije na polovici visine iznosi

$$\Delta\omega_{pp}=\sqrt{3}\frac{R}{L}\ ,$$

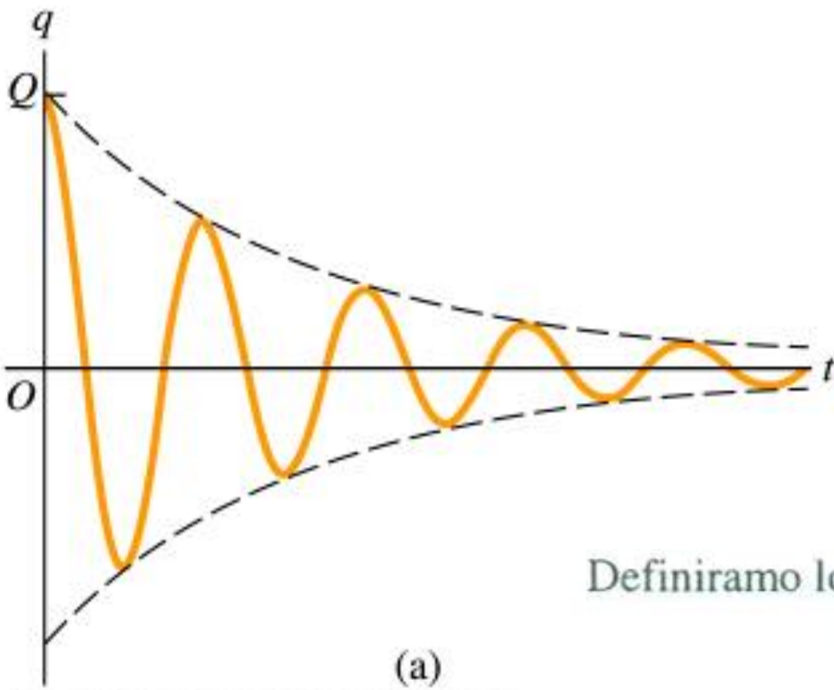
$$|V_{GO}|=R_vI_0=\frac{R_v}{\sqrt{\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2+R^2}}|V_0|$$

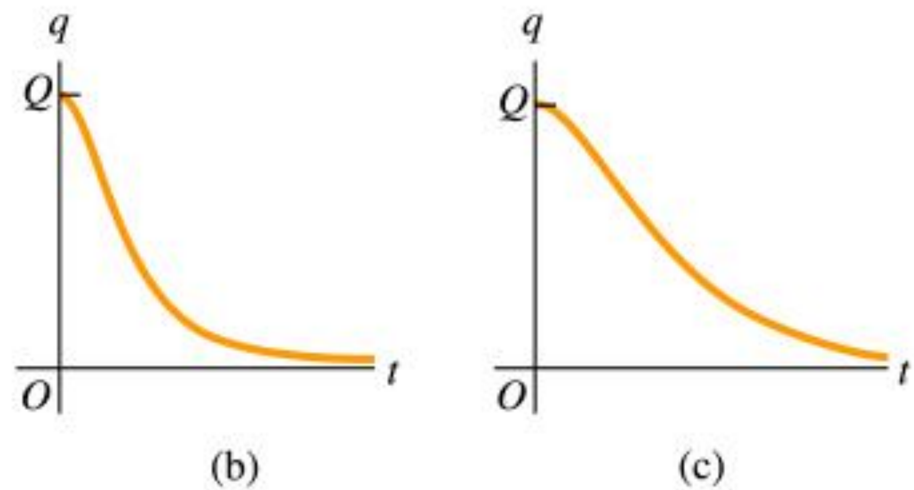
U rezonanciji

$$|V_{GO}|=\frac{R_v}{R}|V_0| \qquad Q=\frac{\omega_0 L}{R}$$


q
Q
O
t
(a)
q
Q
O
t
(b)
q
Q
O
t
(c)

Gušeni harmonički oscilator





Definiramo logaritamski dekrement gušenja Λ:

$$\Lambda = \delta T = \ln \frac{\varphi_n}{\varphi_{n+1}}$$

Faktor dobrote

$$Q = 2\pi \frac{pohranjena \quad energija}{< gubitak \quad energije \quad u \quad jednom \quad periodu >}$$

$$< E(t) > = < E_0(t) > e^{-t/\tau}$$

gdje je $\tau = 1/2\delta$

Slabo gušeni oscilator

$$Q \approx \frac{2\pi E}{\frac{E}{\tau} T} \approx \omega_0 \tau$$

Titranje atoma u kristalima

Linearna rešetka s dva atoma u elementarnoj ćeliji

$$A\,(M_1\,\omega^2 - 2\beta) + 2\beta\,B\cos\frac{ka}{2} = 0$$

$$2\beta\,A\cos\frac{ka}{2} + B\,(M_2\,\omega^2 - 2\beta) = 0$$

Proizlazi kvadratna jednadžba

$$(M_1\,\omega^2 - 2\beta)\,(M_2\,\omega^2 - 2\,\beta) = 4\beta^2\cos^2\frac{ka}{2}$$

Njezino je rješenje

$$\omega_\pm^2\,(k) = \beta\,\frac{M_1 + M_2}{M_1\,M_2}\left[1 \pm \sqrt{1 - 4\,\frac{M_1\,M_2}{(M_1 + M_2)^2}\sin^2\frac{ka}{2}}\,\right]$$

Titranje atoma u kristalima

Linearna rešetka s dva atoma u elementarnoj ćeliji

Titranje kristalne rešetke opisuju dvije disperzivne relacije. Valnom broju k pridružene su frekvencije $\omega_+ (k)$ i $\omega_- (k)$.

$$\omega_+^2 (k) + \omega_-^2 (k) = 2\beta \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2}$$

Disperzivna relacija pokazuje da je frekvencija titranja invarijantna prema translacijama valnog broja za višekratnik osnovne veličine $2\pi/a$. Zamjenom

$$k \to k + \frac{2\pi n}{a} \qquad n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$$

frekvencija titranja ostaje nepromijenjena:

$$\omega \left(k + \frac{2\pi}{a} n\right) = \omega (k) .$$

Stoga valni broj ograničavamo na prvu Brillouinovu zonu:

$$-\frac{\pi}{a} \leq k \leq \frac{\pi}{a} .$$

Titranje atoma u kristalima

Linearna rešetka s dva atoma u elementarnoj ćeliji

Akustička frekvencija

$$\omega_-^2(k) = k^2 \frac{\beta a^2}{2(M_1 + M_2)} + \ldots \quad ka << 1$$

$$v_0 = a\sqrt{\frac{\beta}{2(M_1 + M_2)}}$$

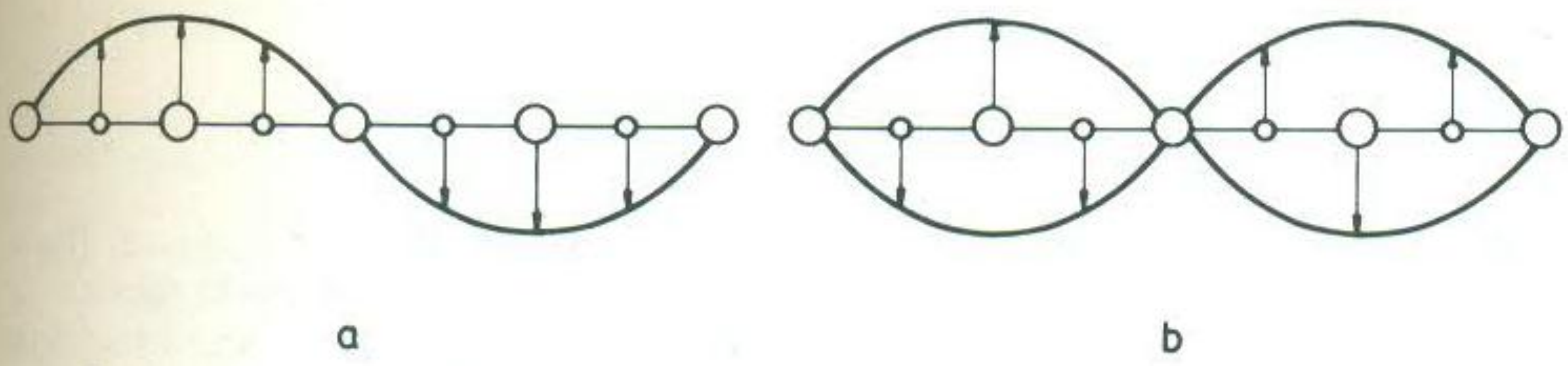
$M_1 = M_2 = M$ tada duljina ćelije postaje dvaput manja, tj. umjesto $a/2$ valja pisati a

$$v_0 = a\sqrt{\frac{\beta}{M}}$$

Ekvivalentno rezultatu ćelije s jednim atomom

Titranje atoma u kristalima

Linearna rešetka s dva atoma u elementarnoj ćeliji



Slika (a) akustičko i (b) optičko titranje atoma u kristalu s dva atoma u elementarnoj ćeliji

Titranje atoma u kristalima

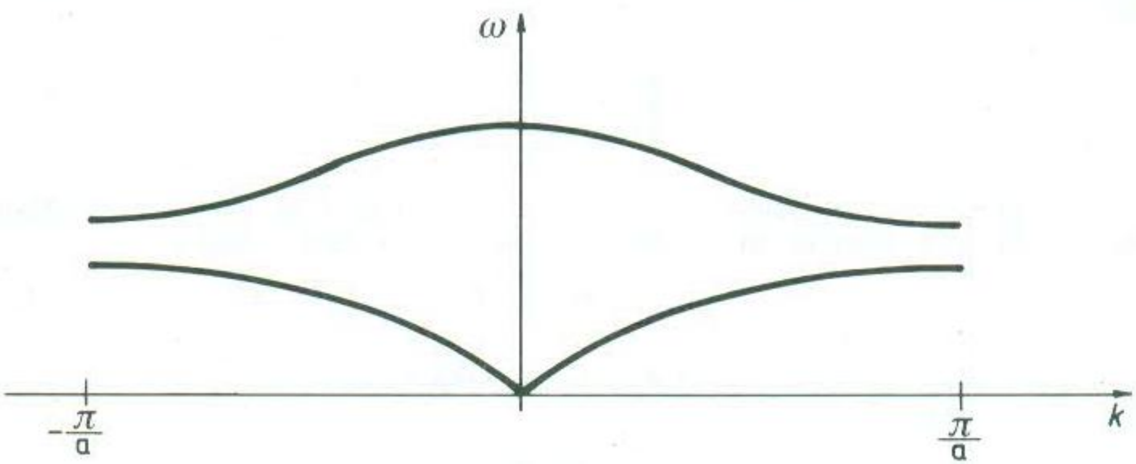
Linearna rešetka s dva atoma u elementarnoj ćeliji

Ovisnost optičke grane frekvencije o valnom broju

$$\omega_+^2(0) = 2\beta \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} \qquad \omega_+(0) = \frac{2 v_o}{a} \frac{M_1 + M_2}{\sqrt{M_1 M_2}}$$

$$\omega_+^2\left(\pm \frac{\pi}{a}\right) = \frac{2\beta}{M_2}$$

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{2\beta}{M_2}} \quad M_1 >> M_2$$



Grafički prikaz disperzivne relacije

Titranje atoma u kristalima

Linearna rešetka s dva atoma u elementarnoj ćeliji

Razmatrajući jednodimenzionalan model, zaključili smo da u jednoatomskoj rešetki postoji jedan oblik, a u dvoatomskoj dva oblika titranja atoma. Kada bi elementarna ćelija sadržavala n atoma, tada bi rešetka mogla titrati na n različitih načina. Dakako, u trodimenzionalnom kristalu broj titranja triput je veći. Za svaki smjer širenja vala postoje tri međusobno okomita titranja. U realnom kristalu svakom valnom vektoru pripada $3n$ frekvencija. Od njih su tri frekvencije akustičke, a preostale frekvencije su optičke. Razumije se, u jednoatomskim rešetkama nema optičkog titranja, pa preostaje samo akustičko titranje.

Titranje atoma u kristalima

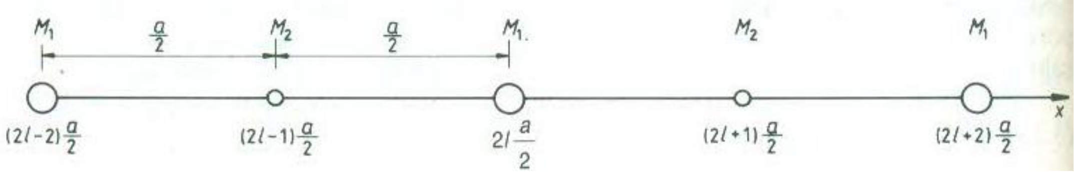
Ionski kristali u elektromagnetskom polju

Čestice M1 imaju +q dok M2 –q naboj

$$M_1 \ddot{u}_{2l} = -\beta(2u_{2l} - u_{2l-1} - u_{2l+1}) + qF$$

$$M_2 \ddot{u}_{2l+1} = -\beta(2u_{2l+1} - u_{2l} - u_{2l+2}) - qF$$

$$\omega = k\,c$$



$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{3 \cdot 10^{13}\ \text{Hz}}{3 \cdot 10^{10}\ \text{cm s}^{-1}} = 10^3\ \text{cm}^{-1}$$

Valna duljina takvog vala

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \approx 6 \cdot 10^{-3}\ \text{cm}$$

Titranje atoma u kristalima

Ionski kristali u elektromagnetskom polju

Primjenjujemo dugovalnu aproksimaciju

$$k\,a << 1$$

Električno polje predočit ćemo relacijom

$$F = F_o\, e^{i\,(kx - \omega\, t)}$$

Zbog velike valne duljine

$$F = F_o'\, e^{-i\,\omega\, t}$$

$$u_n = A\, e^{-i\omega t} \qquad n = 2l,\ 2l + 2, \ldots$$

$$u_n = B\, e^{-i\omega t} \qquad n = 2l - 1,\ 2l + 1, \ldots$$

Titranje atoma u kristalima

Ionski kristali u elektromagnetskom polju

$$(M_1\omega^2 - 2\beta)A + 2\beta B = -qF'_0$$

$$2\beta A + (M_2\omega^2 - 2\beta)B = qF'_0 \quad ,$$

Slijede amplitude ionskog titranja

$$A = \frac{qF'_0}{M_1[\omega_+^2(0) - \omega^2]}$$

$$B = -\frac{qF'_0}{M_2[\omega_+^2(0) - \omega^2]}$$

gdje je $\omega_+(0)$ frekvencija dugovalnoga optičkog titranja rešetke:

$$\omega_+(0) = \sqrt{2\beta \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2}} \quad .$$

Titranje atoma u kristalima

Ionski kristali u elektromagnetskom polju

Tipičnoj rezonantnoj frekvenciji $\omega_+(0) \approx 3 \cdot 10^{13}$ Hz pridružena je valna duljina

Infracrveni dio spektra

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega_+(0)} \approx 6 \cdot 10^{-3}\ \text{cm} \quad .$$

Rezonantne valne duljine određene iz apsorpcije elektromagnetskih valova u alkalnim halogenidima

Kristal	$\lambda/(10^{-3}$ cm)	Kristal	$\lambda/(10^{-3}$ cm)
LiF	3,3	KCl	7,1
KF	4,2	NaBr	7,5
LiCl	5,2	RbCl	8,5
NaCl	5,2	CsCl	9,9
LiBr	6,3	RbI	13,4
RbF	6,5	CsI	15,7

Titranje atoma u kristalima

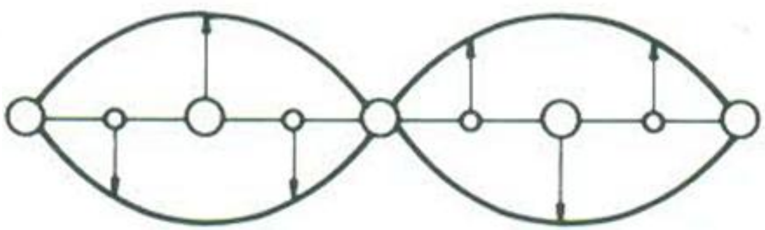
Ionski kristali u elektromagnetskom polju

Titranjem iona stvara se u svakoj elementarnoj ćeliji električni dipolni moment:

$$d = q(A - B)\, e^{-i\omega t}$$

Definirajući reduciranu masu

$$m_r = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2}$$



Čestice M1 imaju +q dok M2 –q naboj

b

Električni dipolni moment u svakoj elementarnoj ćeliji

$$d = \frac{q^2 F}{m_r\, [\omega_+^2(0) - \omega^2]}$$

Titranje atoma u kristalima

Ionski kristali u elektromagnetskom polju

Vektor dielektričke polarizacije

$$P = Gd = \frac{G\,q^2\,F}{m_r\,[\omega_+^2(0) - \omega^2]}$$

Gdje je G koncentracija ćelija u kristalu

Električni pomak $$D = \varepsilon_0\,F + P$$

$$D = \left\{ 1 + \frac{G\,q^2}{\varepsilon_0\,m_r\,[\omega_+^2(0) - \omega^2]} \right\} \varepsilon_0\,F$$

Titranje atoma u kristalima

Ionski kristali u elektromagnetskom polju

$$D = \varepsilon_r \varepsilon_o F$$

$$D = \left\{ 1 + \frac{G\, q^2}{\varepsilon_o m_r \left[\omega_+^2(0) - \omega^2\right]} \right\} \varepsilon_o F$$

Relativna permitivnost ionskog sustava

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\Omega_p^2}{\omega_+^2(0) - \omega^2}$$

frekvencija ionske plazme

$$\Omega_p = q \sqrt{\frac{G}{\varepsilon_o\, m_r}} \approx 4 \cdot 10^{13}\ \mathrm{Hz}$$

$$G = 5 \cdot 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}\ , \qquad m_r = 10^{-25}\ \mathrm{kg} \ \text{ i } \ q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$$

Titranje atoma u kristalima

Ovisnost indeksa loma o frekvenciji

Atom izvan vanjskog električnog polja

$$\omega_o = \frac{v}{r}$$

Odabirući tipične vrijednosti $v = 10^6$ m/s i $r = 10^{-10}$ m, za frekvenciju dobivamo $\omega_o = 10^{16}$ Hz. To je u ultraljubičastom dijelu spektra.

Neka na atom djeluje linearno polarizirani elektromagnetski val

$$F = F_o \, e^{-i\omega t}$$

Ukupna sila na elektron

$$m\ddot{x} = -\,\omega_o^2 \, m x - e F_o \, e^{-i\omega t}$$

Titranje atoma u kristalima

Ovisnost indeksa loma o frekvenciji

Njezino je rješenje

$$x = A\, e^{-i\omega t} \qquad A = -\frac{e F_o}{m(\omega_o^2 - \omega^2)}$$

Inducirani električni dipolni moment određen je relacijom

$$d_e = -e x \ ,$$

$$d_e = \frac{e^2 F}{m(\omega_o^2 - \omega^2)}$$

dobivamo dielektričnu polarizaciju elektronskog sustava:

$$P_e = N_e\, d_e = \frac{N_e\, e^2\, F}{m(\omega_o^2 - \omega^2)} \ .$$

Titranje atoma u kristalima

Ovisnost indeksa loma o frekvenciji

permitivnost ionsko-elektronskog sustava bit će

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\Omega_p^2}{\omega_+^2(0) - \omega^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega_o^2 - \omega^2}$$

Sa ω_p označili smo frekvenciju elektronske plazme:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{N_e e^2}{\varepsilon_o m}} .$$

Elektronska masa mnogo je manja od ionske, pa je frekvencija ω_p mnogo viša od frekvencije ionske plazme Ω_p. Jednako kao i ω_o, frekvencija ω_p je reda veličine 10^{16} Hz.

Titranje atoma u kristalima

Ovisnost indeksa loma o frekvenciji

permitivnost ionsko-elektronskog sustava bit će

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\Omega_p^2}{\omega_+^2(0) - \omega^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega_o^2 - \omega^2}$$

$$\omega >> \Omega_p$$

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_o^2 - \omega^2}$$

Za crvenu svjetlost približno je $\omega_c = 2 \cdot 10^{15}$ Hz, a za ljubičastu $\omega_{lj} = 4 \cdot 10^{15}$ Hz. To je mnogo više od frekvencije Ω_p koja je reda veličine 10^{13} do 10^{14} Hz.

Titranje atoma u kristalima

Ovisnost indeksa loma o frekvenciji

Prema Maxwellovoj relaciji, u nemagnetskim materijalima relativna permitivnost jednaka je kvadratu indeksa loma

$$\varepsilon_r(\omega) = n^2(\omega) \; .$$

$$\varepsilon_r(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_o^2 - \omega^2}$$

$$1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_o^2 - \omega^2} = n^2(\omega) \quad .$$

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_o^2 - \omega^2}} \quad .$$

Maxwellova relacija za indeks loma

$$\nabla \times \vec{H} = \varepsilon_o \, \varepsilon_r \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{F} = - \mu_o \, \mu_r \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \vec{H} = 0$$

$$\nabla \vec{F} = 0 \, ,$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \varepsilon_o \, \varepsilon_r \, \nabla \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{H}) = \nabla (\nabla \vec{H}) - \Delta \vec{H} = - \Delta \vec{H}$$

$$\nabla \times \frac{\partial \vec{F}}{\partial t} = - \mu_o \, \mu_r \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

Maxwellova relacija za indeks loma

$$\Delta \vec{H} = \frac{\varepsilon_r \mu_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \qquad \varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2},$$

gdje je c brzina širenja elektromagnetskih valova u vakuumu

$$c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}}$$

To je poznata valna jednadžba

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Indeks loma medija definiran je kao omjer brzine elektromagnetskih valova

$$n = \frac{c}{c'} \qquad n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$$

Specijalno, ako su magnetski efekti u mediju zanemarivi

$$\mu_r = 1, \qquad n = \sqrt{\varepsilon_r}$$

Titranje atoma u kristalima

Ovisnost indeksa loma o frekvenciji

$$1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_o^2 - \omega^2} = n^2(\omega) \quad .$$

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_o^2 - \omega^2}} \quad . \qquad \omega_o = \frac{v}{r}$$

Sa ω_p označili smo frekvenciju elektronske plazme:

$$\omega_p = \sqrt{\frac{N_e e^2}{\varepsilon_o m}} \quad .$$

Iz relacije možemo odrediti kako se mijenja indeks loma s promjenom boje svjetlosti. Raste li frekvencija od crvenoga dijela prema ljubičastom dijelu vidljivog spektra, smanjivat će se nazivnik pod korijenom izraza pa će indeks loma postajati sve veći. Time objašnjavamo eksperimentalno poznati rezultat da se pri prijelazu bijele svjetlosti iz optički rjeđeg sredstva u optički gušće ljubičaste zrake jače lome od crvenih.