Fakultativni kolegij *Studentska natjecanja iz matematike*, ak. god. 2020./2021.

Tema br. 3:

Ekvidistribuiranost i diskrepancija

Vjekoslav Kovač, 2. 4. 2021.

1 Ekvidistribuiranost

Reći ćemo da je niz $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ u $[0,1\rangle$ *ekvidistribuiran* ako za svaki interval $[a,b\rangle \subseteq [0,1\rangle$ vrijedi

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\operatorname{card}\big\{n\in\{0,1,\ldots,N-1\} : x_n\in[a,b\rangle\big\}}{N} = b-a.$$

Nekada se kaže i da je $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ *uniformno distribuiran*, ali tu terminologiju izbjegavamo da ne bi došlo do nesporazuma s uniformnom vjerojatnosnom razdiobom. Promatrat ćemo isključivo determinističke nizove, a ne nizove slučajnih varijabli. Primijetimo da svojstvo ekvidistribuiranosti implicira gustoću, ali je i mnogo jače: ne samo da u svaki neprazni interval $[a,b\rangle \subseteq [0,1\rangle$ upadne barem jedan član niza, nego je asimptotski udio članova niza koji završe u tom intervalu proporcionalan duljini intervala. Za niz realnih brojeva $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ kažemo da je *ekvidistribuiran modulo* 1 ako $(x_n \bmod 1)_{n=0}^{\infty}$ ima gornje svojstvo. Pritom je

$$x \bmod 1 := x - \lfloor x\rfloor.$$

Sljedeći primjer pokazuje da ekvidistribuiranost nije jednostavan pojam, jer nije garantirana pukom "iracionalnosti".

Primjer 1. Pokažite da niz $\big((1+\sqrt{2})^n\big)_{n=0}^{\infty}$ nije gust modulo 1 pa nije ni ekvidistribuiran modulo 1.

Rješenje. Iz binomnog poučka dobivamo

$$(1+\sqrt{2})^n + (1-\sqrt{2})^n = 2\sum_{k=0}^{\lfloor n/2\rfloor} \binom{n}{2k} 2^k \in \mathbb{Z}$$

pa su brojevi $(1+\sqrt{2})^n$ i $-(1-\sqrt{2})^n$ jednaki modulo 1, a posljednji izraz konvergira u 0 radi $|1-\sqrt{2}|<1$. Zato niz iz primjera nije gust modulo 1.

Nije poznato jesu li npr. $(\pi^n)_{n=0}^{\infty}$, $(e^n)_{n=0}^{\infty}$ i $\big((\frac{3}{2})^n\big)_{n=0}^{\infty}$ ekvidistribuirani modulo 1. S druge strane, opet se zna da je takav $(\alpha^n)_{n=0}^{\infty}$ za gotovo svaki $\alpha>1$ u smislu Lebesgueove mjere, tj. za svaki $\varepsilon>0$ se skup izuzetaka α može prekriti prebrojivom unijom intervala suma čijih duljina je manja od ε. To se dokazuje na vrlo nekonstruktivan način, bez da se uopće konstruira ijedan takav α.

Tipični primjer niza koji jest ekvidistribuiran modulo 1 su višekratnici fiksnog iracionalnog broja. Njegova gustoća je lagana vježba, a i ekvidistribuiranost se može dokazati elementarno (makar uz dosta pisanja). Mnogo je lakše uz sljedeći rezultat, čiji dokaz koristi Fourierovu analizu.

Teorem 2 (Weylov kriterij ekvidistribuiranosti)**.** *Za niz realnih brojeva $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ ekvivalentne su sljedeće tvrdnje.*

(a) Niz $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ *je ekvidistribuiran modulo* 1.

(b) Za svaku 1*-periodičnu funkciju* $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *Riemann-integrabilnu na segmentu* $[0,1]$ *vrijedi*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n) = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(c) Za svaki $k \in \mathbb{N}$ *vrijedi*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k x_n} = 0.$$

Dokaz ovog rezultata uči se npr. na kolegiju *Fourierovi redovi i primjene.*

Implikacija (a) $\Longrightarrow$ (b) može pomoći kod numeričkog računanja integrala; to je tzv. *kvazi Monte Carlo metoda.* Trenutni nedostatak je što ne znamo koliki N trebamo uzeti da bismo integral aproksimirali do na željenu grešku. Teorija iz idućeg odjeljka će nadomjesititi i taj nedostatak.

Implikacija (c) $\Longrightarrow$ (a) je vrlo korisna jer provjeru ekvidistribuiranosti svodi na ocjene tzv. eksponencijalnih suma.

Primjer 3. Dokažite da je za svaki za svaki $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ i svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ niz $(n\theta + \alpha)_{n=0}^{\infty}$ ekvidistribuiran modulo 1.

Rješenje. Glavna težina dokaza je skrivena u Weylovom kriteriju, jer sada za svaki $k \in \mathbb{N}$ naprosto možemo primijetiti

$$\Big| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k (n\theta+\alpha)} \Big| = \Big| \frac{1}{N} e^{2\pi i k\alpha} \frac{1 - e^{2\pi i k N\theta}}{1 - e^{2\pi i k\theta}} \Big| \leqslant \frac{2}{N|1 - e^{2\pi i k\theta}|}$$

te pustiti $N \to \infty$ korištenjem teorema o sendviču. Napomenimo da smo iracionalnost od θ koristili u činjenici da za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $k\theta \notin \mathbb{Z}$, tj. $e^{2\pi i k\theta} \neq 1$.

Posebno je zanimljivo pitanje ekvidistribuiranosti polinomijalnih nizova. Za to nam treba sljedeći pomoćni rezultat, kojeg ćemo čak i dokazati.

Lema 4 (Van der Corputova lema)**.** *Neka je* $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ *niz realnih brojeva. Ako je za svaki* $h \in \mathbb{N}$ *niz* $(x_{n+h} - x_n)_{n=0}^{\infty}$ *ekvidistribuiran modulo* 1*, tada to vrijedi i za polazni niz.*

Dokaz. Najprije ćemo izvesti ocjenu pogodnu za primjenu Weylovog kriterija. Uzmimo prirodne brojeve k i $1 \leqslant H \leqslant N$. Za svaki $j \in \{1, 2, \ldots, H\}$ se kompleksni brojevi

$$\frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{2\pi i k x_m} \quad \text{i} \quad \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{2\pi i k x_{m+j}}$$

razlikuju najviše za $2H/N$ pa uzimanjem prosjeka po j, korištenjem aritmetičko-kvadratne nejednakosti, raspisivanjem $|z|^2 = z\overline{z}$ i izdvajanjem “dijagonalnih” članova (za $j' = j$) dobivamo:

$$\Big| \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} e^{2\pi i k x_m} \Big| \leqslant \frac{2H}{N} + \Big| \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{H} \sum_{j=1}^{H} e^{2\pi i k x_{m+j}} \Big|$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \frac{2H}{N} + \Big(\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\Big|\frac{1}{H}\sum_{j=1}^{H} e^{2\pi i k x_{m+j}}\Big|^2\Big)^{1/2} \\
&= \frac{2H}{N} + \Big(\frac{1}{H} + \frac{2}{H^2N}\,\mathrm{Re}\sum_{\substack{0\leqslant m\leqslant N-1\\ 1\leqslant j<j'\leqslant H}} e^{2\pi i k(x_{m+j'}-x_{m+j})}\Big)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Supstitucijom $n = m + j$, $h = j' - j$ posljednja trostruka suma postaje

$$
\sum_{\substack{j,h\geqslant 1,\ j+h\leqslant H\\ j\leqslant n\leqslant N+j-1}} e^{2\pi i k(x_{n+h}-x_n)}
$$

i ona se od

$$
\sum_{\substack{j,h\geqslant 1,\ j+h\leqslant H\\ 0\leqslant n\leqslant N-1}} e^{2\pi i k(x_{n+h}-x_n)} = \sum_{h=1}^{H}(H-h)\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k(x_{n+h}-x_n)}
$$

razlikuje najviše za $\sum_{j=1}^{H}(H-j)2j \leqslant 2H^3$. Nakon stavljanja apsolutnih vrijednosti unutar sume po h možemo još grubo ocijeniti $H - h \leqslant H$. Zato konačno smijemo pisati

$$
\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k x_n}\Big| \leqslant \frac{2H}{N} + \Big(\frac{1}{H} + \frac{4H}{N} + \frac{2}{H}\sum_{h=1}^{H}\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k(x_{n+h}-x_n)}\Big|\Big)^{1/2}.
$$

Po pretpostavci o ekvidistribuiranosti od $(x_{n+h} - x_n)_{n=0}^{\infty}$ modulo 1 Weylov kriterij, implikacija (a) $\Longrightarrow$ (c), daje

$$
\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k(x_{n+h}-x_n)} = 0
$$

pa iz gore izvedene nejednakosti slijedi

$$
\limsup_{N\to\infty} \Big|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k x_n}\Big| \leqslant \frac{1}{H^{1/2}}.
$$

Kako je $H \in \mathbb{N}$ mogao biti proizvoljan, dobili smo upravo

$$
\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k x_n} = 0
$$

pa Weylov kriterij, implikacija (c) $\Longrightarrow$ (a), dokazuje ekvidistribuiranost od $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ modulo 1. □

Sljedeći rezultat bi bilo vrlo teško dokazati "direktno".

Primjer 5. Pokažite da je za svaki $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ i svake $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ niz $(n^2\theta + n\alpha + \beta)_{n=0}^{\infty}$ ekvidistribuiran modulo 1.

Čak ni gustoća modulo 1 spomenutog kvadratnog niza nipošto nije očigledna!

Rješenje. Za svaki $h \in \mathbb{N}$ imamo

$$(n+h)^2\theta + (n+h)\alpha + \beta - n^2\theta - n\alpha - \beta = n(2h\theta) + h^2\theta + h\alpha.$$

Radi $2h\theta \notin \mathbb{Q}$ i primjera 3 znamo da je gornji niz ekvidistribuiran pa željena tvrdnja slijedi iz leme 4.

Sasvim općenito, ako je $P(t) \in \mathbb{R}[t]$ polinom s barem jednim iracionalnim nekonstantnim koeficijentom, tada je niz $(P(n))_{n=0}^{\infty}$ ekvidistribuiran modulo 1. To je također pokazao H. Weyl. Ukoliko je baš vodeći koeficijent polinoma iracionalan, tada se dokaz lako provodi indukcijom po stupnju polinoma i korištenjem leme 4, sasvim isto kao u prethodnom primjeru. Slabiju tvrdnju, koja se tiče samo gustoće modulo 1, trebat će dokazati u zadatku 6.

2 Diskrepancija

Riječ je o kvantitativnom mjerilu ekvidistribuiranosti niza. Neka je $\mathbf{x} = (x_n)_{n=0}^{\infty}$ niz u $[0,1\rangle$ i neka je $N \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Definiramo *diskrepanciju prvih N članova niza* $\mathbf{x}$ kao veličinu

$$D_N(\mathbf{x}) := \sup_{[a,b\rangle \subseteq [0,1\rangle} \Big| \frac{\operatorname{card}\big\{n \in \{0,1,\ldots,N-1\} : x_n \in [a,b\rangle\big\}}{N} - (b-a) \Big|.$$

Očigledno $\lim_{N\to\infty} D_N(\mathbf{x}) = 0$ implicira činjenicu da je $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ ekvidistribuiran. U primjeru 7 ćemo pokazati da vrijedi i obratno. *Diskrepancija modulo* 1 realnog niza $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ definira se tako da se naprosto gleda niz $(x_n \bmod 1)_{n=0}^{\infty}$ i opet se označava $D_N(\mathbf{x})$.

Kvantitativna varijanta Weylov kriterija, implikacija (c) $\Longrightarrow$ (a), je sljedeća poznata ograda. Ona svodi omeđivanje diskrepancije niza opet na ocjenjivanje eksponencijalnih suma.

Teorem 6 (Erdős–Turánova nejednakost)**.** *Za niz realnih brojeva $\mathbf{x} = (x_n)_{n=0}^{\infty}$ i svake $K, N \in \mathbb{N}$ vrijedi*

$$D_N(\mathbf{x}) \leqslant \frac{6}{K+1} + \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{k} \Big| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k x_n} \Big|.$$

Primjer 7. Dokažite da je niz $\mathbf{x}$ ekvidistribuiran modulo 1 ako i samo ako vrijedi $\lim_{N\to\infty} D_N(\mathbf{x}) = 0$.

Rješenje. Treba dokazati samo netrivijalni smjer. Pretpostavimo da je niz $\mathbf{x} = (x_n)_{n=0}^{\infty}$ ekvidistribuiran modulo 1. Zadajmo $\varepsilon > 0$. Neka je K dovoljno veliki prirodni broj da vrijedi $6/(K+1) < \varepsilon/2$. Za svaki $k \in \{1,2,\ldots,K\}$ Weylov kriterij, implikacija (a) $\Longrightarrow$ (c), daje

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k x_n} = 0.$$

Zato postoji $N_0 \in \mathbb{N}$ takav da za svaki $k \in \{1,2,\ldots,K\}$ i svaki $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant N_0$ vrijedi

$$\Big| \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k x_n} \Big| < \frac{\pi\varepsilon}{8K}.$$

Sada teorem 6 za svaki $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant N_0$ daje $D_N(\mathbf{x}) < \varepsilon$.

Ukoliko je ekvidistribuiranost niza posljedica neke "iracionalnosti", kao u primjerima 3 i 5, tada za ocjenu njegove diskrepancije treba "kvantificirati spomenutu iracionalnost". Kažemo da je broj $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *loše aproksimabilan* s konstantom $c > 0$ ako vrijedi

$$\Big|\theta - \frac{p}{q}\Big| \geqslant \frac{c}{q^2} \quad \Longleftrightarrow \quad |q\theta - p| \geqslant \frac{c}{q}$$

za sve $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$. Dakle, $q\theta$ je od svakog cijelog broja udaljen barem za c/q. Definicija je motivirana sljedećim jednostavnim rezultatom.

Primjer 8 (Dirichletov teorem aproksimacije)**.** Neka je $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Pokažite da postoji beskonačno mnogo parova $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ takvih da vrijedi

$$\Big|\theta - \frac{p}{q}\Big| < \frac{1}{q^2}.$$

Rješenje. Uzmimo $N \in \mathbb{N}$ i promotrimo brojeve $n\theta \bmod 1$ za $n = 0, 1, \ldots, N$. Njihovim sortiranjem odmah vidimo da postoje $j, k \in \{0, 1, \ldots, N\}$, $j < k$ takvi da se $k\theta - j\theta$ razlikuje od nekog cijelog broja p za manje od $1/N$. Ako još uzmemo $q = k - j$, tada smo dobili

$$|q\theta - p| < \frac{1}{N} \quad \Longrightarrow \quad \Big|\theta - \frac{p}{q}\Big| < \frac{1}{qN} \leqslant \frac{1}{q^2}$$

za neke $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \{1, \ldots, N\}$. Sada ponovimo postupak uzimajući $N' \in \mathbb{N}$ dovoljno velik da je

$$\frac{1}{N'} < \Big|\theta - \frac{p}{q}\Big|.$$

Za novodobivene $p' \in \mathbb{Z}$, $q' \in \{1, \ldots, N'\}$ imamo

$$\Big|\theta - \frac{p'}{q'}\Big| < \frac{1}{q'N'} \leqslant \frac{1}{N'}$$

pa svakako vrijedi $(p', q') \neq (p, q)$. Nastavljamo ponavljati postupak.

Dakle, loše aproksimabilni brojevi su svojevrsne "krajnosti" u smislu prethodnog rezultata. U zadatku 9 je dan primjer jednog loše aproksimabilnog broja.

Kakve veze imaju loše aproksimabilni brojevi s diskrepancijom?

Primjer 9. Ako je $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ loše aproksimabilan s konstantom $c \in \langle 0, 1/2]$ i $\alpha \in \mathbb{R}$ proizvoljan te ako je $\mathbf{x} = (x_n)_{n=0}^{\infty}$ definiran sa $x_n := n\theta + \alpha$, dokažite

$$D_N(\mathbf{x}) \leqslant \frac{5}{c\sqrt{N}}.$$

Rješenje. Koristeći račun iz primjera 3 za svaki $k \in \mathbb{N}$ dobivamo:

$$\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i k(n\theta+\alpha)}\Big| \leqslant \frac{2}{N|1 - e^{2\pi i k\theta}|}.$$

Uz pretpostavku na θ vrijedi da je $k\theta$ od svakog cijelog broja udaljen barem za c/k pa nadalje imamo

$$\begin{aligned} |1 - e^{2\pi i k\theta}| &\geqslant |1 - e^{2\pi i(c/k)}| = \sqrt{(1 - \cos(2\pi c/k))^2 + (\sin(2\pi c/k))^2} \\ &= 2\sin\frac{\pi c}{k} \geqslant \frac{4c}{k}, \end{aligned}$$

odakle je

$$\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi ik(n\theta+\alpha)}\Big| \leqslant \frac{k}{2cN}.$$

Sada Erdős–Turánova nejednakost (teorem 6) za $K, N \in \mathbb{N}$ daje

$$D_N(\mathbf{x}) \leqslant \frac{6}{K} + \frac{2K}{3cN}.$$

Optimizacijom vidimo da je pametno uzeti K reda veličine $\sqrt{N}$, recimo $K = \lceil\sqrt{N}\rceil$, odakle slijedi željena tvrdnja:

$$D_N(\mathbf{x}) \leqslant \frac{6}{\sqrt{N}} + \frac{4\sqrt{N}}{3cN} \leqslant \frac{5}{c\sqrt{N}}.$$

Dokazana ocjena je daleko od optimalne; izveli smo ju samo kao primjer neke konkretne ograde.

Za svaki niz trivijalno vrijedi

$$D_N(\mathbf{x}) \geqslant \frac{1}{N};$$

pogledajte recimo zadatak 10. Mnogo teže je dokazati da postoji konstanta $c_{\text{donja}} > 0$ takva za svaki niz $\mathbf{x}$ za beskonačno mnogo prirodnih brojeva N vrijedi

$$\mathrm{D}_N(\mathbf{x}) \geqslant c_{\text{donja}}\frac{\ln N}{N}.$$

Zato se nizovi $\mathbf{x}$ takvi da postoji konačna konstanta $C_{\mathbf{x}}$ (ovisna o nizu) takva da za svaki prirodni broj N vrijedi

$$\mathrm{D}_N(\mathbf{x}) \leqslant C_{\mathbf{x}}\frac{\ln N}{N}$$

zovu *nizovi s niskom diskrepancijom* ili *kvazislučajni nizovi.* Ovdje nećemo ulaziti u neke moguće konstrukcije takvih nizova.

Nizovi s niskom diskrepancijom mogu biti korisni i kod, ranije spomenutog, numeričkog računanja integrala, temeljenog na Weylovom kriteriju ekvidistribuiranosti.

Teorem 10 (Koksmina nejednakost)**.** *Za svaki niz* $\mathbf{x} = (x_n)_{n=0}^{\infty}$ *u* $[0,1\rangle$ *vrijedi*

$$\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x_n) - \int_{[0,1]} f(x)\,\mathrm{d}x\Big| \leqslant \mathrm{V}(f)\,\mathrm{D}_N(\mathbf{x}),$$

pri čemu je $\mathrm{V}(f)$ *totalna varijacija fukcije* $f\colon [0,1] \to \mathbb{C}$.

Gornji rezultat daje vrlo konkretnu ocjenu greške kod numeričke integracije kvazi Monte Carlo metodom.

3 Zadaci za vježbu (riješite ih 6 za DZ)

Zadatak 1. Neka je $\varphi := (1+\sqrt{5})/2$ tzv. *zlatni rez.* Je li niz $\big(\varphi^n\big)_{n=0}^{\infty}$ gust modulo 1?

Zadatak 2. Ako su $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ takvi da vrijedi $\theta_1/\theta_2 \notin \mathbb{Q}$, dokažite da je skup $\{\alpha_1\theta_1 + \alpha_2\theta_2 : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{Z}\}$ gust u cijelom $\mathbb{R}$.

Zadatak 3. Kažemo da je broj $x \in [0,1\rangle$ *normalan* u bazi $d \in \mathbb{N}$, $d \geqslant 2$ ako mu se, u zapisu s bazom d, svaki mogući blok znamenki duljine m pojavljuje s asimptotskim udjelom d^{-m}. Dokažite da je x normalan u bazi d ako i samo ako je niz $\big(d^n x\big)_{n=0}^{\infty}$ ekvidistribuiran modulo 1.

Zadatak 4. Dokažite ekvidistribuiranost niza $(\sqrt{n} \bmod 1)_{n=0}^{\infty}$.

Zadatak 5. Otprilike 30.1% potencija broja 2 počinje znamenkom 1. Preciznije, dokažite da za svaki $k \in \{1,2,\ldots,9\}$ vrijedi

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \operatorname{card}\big\{n \in \{0,1,\ldots,N-1\} : 2^n \text{ počinje znamenkom } k\big\} = \log_{10} \frac{k+1}{k}.$$

Zadatak 6. Ako je $P(t) \in \mathbb{R}[t]$ polinom s barem jednim iracionalnim nekonstantnim koeficijentom, dokažite da je niz $(P(n))_{n=0}^{\infty}$ gust modulo 1.

Zadatak 7. Neka su $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ i $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ nizovi u $[0,1\rangle$ takvi da vrijedi $\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = 0$. Ako je $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ ekvidistribuiran, dokažite da je $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ također ekvidistribuiran.

Zadatak 8 (za one koji znaju osnove teorije mjere i integrala)**.** Neka je $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ ekvidistribuirani niz u $[0,1\rangle$, neka je $U \subseteq \langle 0,1\rangle$ otvoreni skup, a $K \subseteq [0,1]$ zatvoreni skup. Dokažite

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{\operatorname{card}\big\{n \in \{0,1,\ldots,N-1\} : x_n \in U\big\}}{N} \geqslant \lambda(U)$$

i

$$\limsup_{N\to\infty} \frac{\operatorname{card}\big\{n \in \{0,1,\ldots,N-1\} : x_n \in K\big\}}{N} \leqslant \lambda(K),$$

pri čemu λ označava Lebesgueovu mjeru. Nadalje, ako Lebesgue-izmjerivi skup $A \subseteq [0,1\rangle$ ima rub mjere 0, dokažite da tada vrijedi

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\operatorname{card}\big\{n \in \{0,1,\ldots,N-1\} : x_n \in A\big\}}{N} = \lambda(A).$$

Zadatak 9. Pokažite da je *recipročni zlatni rez* $\psi = (-1+\sqrt{5})/2$ loše aproksimabilan s konstantom $c = 1/3$.

Zadatak 10. Ako je $0 \leqslant x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_{N-1} < 1$, dokažite

$$D_N(\mathbf{x}) = \frac{1}{N} + \max_{0\leqslant n\leqslant N-1}\Big(\frac{n+1}{N} - x_n\Big) - \min_{0\leqslant n\leqslant N-1}\Big(\frac{n+1}{N} - x_n\Big).$$

Zadatak 11. Popravite primjer 9 za čitavi red veličine kada $N \to \infty$, tj. za svaki $N \in \mathbb{N}$ dokažite ogradu oblika

$$D_N(\mathbf{x}) \leqslant C_{\theta,\varepsilon} N^{-1+\varepsilon}.$$

za neki $\varepsilon < 1/2$ i neku konačnu konstantu $C_{\theta,\varepsilon}$ ovisnu o θ i ε.

Zadatak 12. Neka je $\psi = (-1+\sqrt{5})/2$ recipročni zlatni rez i neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Promotrimo kvadratni niz $\mathbf{x} = (x_n)_{n=0}^{\infty}$ dan formulom $x_n = n^2\psi + n\alpha + \beta$ za $n \in \mathbb{N}_0$. Za svaki $N \in \mathbb{N}$ dokažite

$$D_N(\mathbf{x}) \leqslant \frac{10 \ln N}{N^{1/5}}.$$