Linearna algebra 1 (2022./2023)
3. domaća zadaća

1. Neka je $A \in M_n$, te neka su $S_1, S_2, \ldots, S_n$ redom njezini stupci. Neka je
$$C = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \ldots & \gamma_n \end{bmatrix}^T \in M_{n1}.$$
Dokažite da je $AC = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i S_i$.
Nadalje, ako stupci matrice A čine linearno zavisan skup u prostoru M_{n1}, pokažite da postoji stupac $D \in M_{n1}$, $D \neq 0$, takav da vrijedi $AD = 0$.

2. Ako stupci matrice $A \in M_n$ čine linearno zavisan skup u prostoru M_{n1}, dokažite da je tada $\det A = 0$.

3. Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, te $M = \{T \in M_2 : AT = TA\}$. Dokažite da je M vektorski prostor, te mu odredite neku bazu i dimenziju.

4. Izračunajte, ako postoji, inverz matrice $A = [a_{ij}] \in M_4$ čiji su koeficijenti zadani s
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako je } i = j, \\ x, & \text{ako je } i = j - 1, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

5. Neka je $A \in M_n$, $n \geq 2$. Dokažite da je A regularna ako i samo ako joj je adjunkta $\tilde{A}$ regularna. Nadalje, ako je A regularna i ima determinantu jednaku x, odredite determinantu adjunkte $\tilde{A}$.