

LA2 2022./2023. Treća domaća zadaća

1. Neka je  $A \in M_n$ ,  $n \geq 2$ , te neka su  $S_1, S_2, \dots, S_n$  njezini stupci. Neka je još  $C \in M_{n1}$  proizvoljan stupac s komponentama  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ . Dokažite da je  $AC = \sum_{i=1}^n \gamma_i S_i$ . Nadalje, ako stupci matrice  $A$  čine linearno zavisani skup u prostoru  $M_{n1}$ , pokažite da postoji stupac  $D \in M_{n1}$ ,  $D \neq 0$ , takav da vrijedi  $AD = 0$ .
2. Ako stupci matrice  $A \in M_n$  čine linearno zavisani skup u prostoru  $M_{n1}$ , dokažite da je tada  $\det A = 0$ .
3. Neka je  $A \in M_n$ . Dokažite:  $A$  je singularna ako i samo ako postoji  $B \in M_n$ ,  $B \neq 0$ , sa svojstvom  $AB = 0$ .
4. Izračunajte determinantu matrice  $A = (a_{ij}) \in M_4$  čiji su koeficijenti zadani s  $a_{ij} = 1$ , ako je  $i = j$ ,  $a_{ij} = x$ , ako je  $i = j - 1$  te  $a_{ij} = 0$  za sve ostale parove indeksa  $i, j$ .
5. Neka je  $A \in M_n$ ,  $n \geq 2$ . Dokažite da je  $A$  regularna ako i samo ako joj je adjunkta  $\tilde{A}$  regularna. Nadalje, ako je  $A$  regularna i ima determinantu jednaku  $x$ , odredite determinantu adjunkte  $\tilde{A}$ .