$1a$	$1b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 7. 2. 2023.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora niti ikakvih formula osim onih koje će vam biti podijeljene na početku pisanja.

1. (ukupno 20 bodova)

   (a) (10 bodova) Odredite tip lokalnih ekstrema funkcije $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zadane s
   $$f(x,y,z) = 2\operatorname{arctg} x - y^2 - z^2 - x - yz.$$

   (b) (10 bodova) Odredite globalne ekstreme funkcije $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadane s
   $$g(x,y) = e^x(x-y)$$
   na skupu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ koji je trokut s vrhovima $(0,0),(2,0),(2,1)$.

$2a$	$2b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 7. 2. 2023.

2. (ukupno 20 bodova)

   (a) (10 bodova) Skup S je područje ravnine omeđeno krivuljama

   $$x = y, \quad x^2 - 3x = y.$$

   Odredite površinu tog skupa.

   (b) (10 bodova) Izračunajte trostruki integral

   $$\iiint\limits_D \frac{xy}{x^2+y^2}\, dx\, dy\, dz,$$

   pri čemu je $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x,\ x^2 + y^2 \leq 4\}$.

JMBAG IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 7. 2. 2023.

3. (ukupno 10 bodova) Izračunajte vrijednost krivuljnog integrala

$$\int_C -x^3 y\,dx + x^4\,dy,$$

pri čemu je krivulja C pozitivno orijentirani rub područja

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9,\ x \leq 0\}.$$

4	5	6	7	8

JMBAG | IME I PREZIME | PROFESOR

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 7. 2. 2023.

4. (10 bodova) Neka su A, B, C, D, E, F realni brojevi takvi da je $AC > B^2$. Koliko lokalnih ekstrema ima funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana formulom

$$f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 2Dx - 2Ey + F?$$

Ne trebate odrediti te ekstreme, već samo rigorozno obrazložiti svoj odgovor.

Rješenje. Kako je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2Ax + 2By - 2D,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2Bx + 2Cy - 2E,$$

vidimo da su stacionarne točke (x, y) rješenja sustava linearnih jednadžbi

$$Ax + By = D,$$
$$Bx + Cy = E.$$

Determinanta tog sustava je

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2 > 0;$$

dakle nije jednaka 0 pa sustav ima jedinstveno rješenje. Nadalje,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2A,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2B,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2C.$$

Dakle, u jedinstvenoj stacionarnoj točki Hesseova matrica (tj. matrica drugih derivacija) glasi

$$\begin{bmatrix} 2A & 2B \\ 2B & 2C \end{bmatrix}.$$

Njezina determinanta je $4(AC - B^2)$. Prisjetimo se da je $AC > B^2 \geq 0$ te je posebno $AC > 0$, odakle vidimo $A \neq 0$.

- Ako je $A > 0$, tada iz $2A > 0$, $4(AC - B^2) > 0$ zaključujemo da je stacionarna točka zapravo točka lokalnog minimuma.

- Ako je $A < 0$, tada iz $2A < 0$, $4(AC - B^2) > 0$ zaključujemo da je stacionarna točka zapravo točka lokalnog maksimuma.

U oba slučaja funkcija f ima točno jedan lokalni ekstrem.

5. (10 bodova) Integral u Kartezijevim koordinatama

$$\int_0^{\sqrt{2}} \int_x^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

zapišite kao integral u sfernim koordinatama. Potom izračunajte volumen tijela po kojem se integrira, tj. volumen od

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le x \le \sqrt{2},\ \ x \le y \le \sqrt{4-x^2},\ \ 0 \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2}\right\}.$$

Rješenje. Domena integracije D zadana je uvjetima

$$0 \le x \le \sqrt{2},\ x \le y \le \sqrt{4-x^2},\ 0 \le z \le \sqrt{4-x^2-y^2}.$$

Primijetite da je $0 \le x \le y$, $z \ge 0$ i da zadnji uvjet daje $x^2+y^2+z^2 \le 4$. Uvjet $y \le \sqrt{4-x^2}$ sada postaje nepotreban, jer slijedi iz $x^2+y^2 \le x^2+y^2+z^2 \le 4$. Isto tako i uvjet $x \le \sqrt{2}$ postaje nepotreban, jer slijedi iz $0 \le x \le \sqrt{4-x^2}$, tj. $2x^2 \le 4$. Dakle,

$$D = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 0 \le x \le y,\ \ z \ge 0,\ \ x^2+y^2+z^2 \le 4\right\}.$$

U sfernim koordinatama

$$x = \rho\sin\varphi\cos\theta,\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta,\ z = \rho\cos\varphi$$

je to tijelo određeno sa

$$0 \le \cos\theta \le \sin\theta,\ \cos\varphi \ge 0,\ \rho^2 \le 4,$$

tj.

$$\pi/4 \le \theta \le \pi/2,\ 0 \le \varphi \le \pi/2,\ \rho \le 2.$$

Integral postaje

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^2 f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta.$$

Volumen samog tijela D se tada dobije uzimanjem $f \equiv 1$ i po Fubinijevom teoremu iznosi

$$\Big(\int_{\pi/4}^{\pi/2} \mathrm{d}\theta\Big)\Big(\int_0^{\pi/2} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\Big)\Big(\int_0^2 \rho^2\,\mathrm{d}\rho\Big) = \frac{\pi}{4}\cdot 1\cdot\frac{8}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

6. (10 bodova) Izračunajte duljinu krivulje s jednadžbom $y = \operatorname{ch} x$ koja se nalazi između pravaca $x = 0$ i $x = 1$.

Rješenje. Riječ je o krivulji, tj. Jordanovom luku

$$\Gamma = \{(x, \mathrm{ch}x) : 0 \le x \le 1\}$$

pa je paramatrizacija (očigledno)

$$\vec{r}(t) = (t, \mathrm{ch}t), \quad 0 \le t \le 1.$$

Kako je

$$\vec{r}\,'(t) = (1, \mathrm{sh}t), \quad |\vec{r}\,'(t)| = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2 t} = \mathrm{ch}t,$$

duljina od Γ je

$$\ell(\Gamma) = \int_0^1 \mathrm{ch}t\,\mathrm{d}t = \mathrm{sh}1 - \mathrm{sh}0 = \mathrm{sh}1 = \frac{e-e^{-1}}{2}.$$

7. (10 bodova) Neka su točke $P, Q \in \mathbb{R}^2$ redom udaljene za 2 i za 3 od ishodišta. Izračunajte krivuljni integral (druge vrste) vektorskog polja $\vec{v}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\vec{v}(x,y) = (x,y)$ duž bilo koje orijentirane krivulje $\vec{\Gamma}$ s početkom P i krajem Q.

Rješenje. Primijetimo da je $v = \nabla f$, gdje je $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x^2+y^2)/2$. Naime,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = y.$$

Sada formula s predavanja daje

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\Gamma = f(Q) - f(P).$$

Ako imamo koordinate točaka $P = (x_P, y_P)$, $Q = (x_Q, y_Q)$, onda uvjet zadatka daje

$$x_P^2 + y_P^2 = 2^2 = 4, \quad x_Q^2 + y_Q^2 = 3^2 = 9$$

pa je

$$\int_{\vec{\Gamma}} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\Gamma = \frac{x_Q^2 + y_Q^2}{2} - \frac{x_P^2 + y_P^2}{2} = \frac{9}{2} - \frac{4}{2} = \frac{5}{2}.$$

8. (10 bodova) Neka je $\vec{\Gamma}$ pozitivno orijentirana krivulja koja obilazi rub pravokutnika $P = [0,2] \times [0,1]$. Izračunajte

$$\int_{\vec{\Gamma}} \big(e^{xy} + 2\big) y \,\mathrm{d}x + \big(e^{xy} + 3\big) x \,\mathrm{d}y.$$

Rješenje. Primjenjujemo Greenovu formulu uz

$$P(x,y) = e^{xy} y + 2y, \quad Q(x,y) = e^{xy} x + 3x$$

te je

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = e^{xy} xy + e^{xy} + 3, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = e^{xy} xy + e^{xy} + 2$$

pa onda imamo

$$\int_{\vec{\Gamma}} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y = \int_P \Big(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\Big) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \int_P 1 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \text{površina od } P = 2.$$

$1a$	$1b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 7. 2. 2023.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora niti ikakvih formula osim onih koje će vam biti podijeljene na početku pisanja.

1. (ukupno 20 bodova)

   (a) (10 bodova) Ispitajte tip lokalnih ekstrema funkcije $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ zadane s

   $$f(x, y, z) = x^2 + xz + z^2 + y - 2 \operatorname{arctg} y.$$

   (b) (10 bodova) Odredite globalni maksimum funkcije $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadane s

   $$g(x, y) = e^y (y - x)$$

   na skupu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ koji je trokut s vrhovima $(0, 0), (0, 2), (1, 2)$.

2a	2b

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 7. 2. 2023.

2. (ukupno 20 bodova)

   (a) (10 bodova) Skup S je područje ravnine omeđeno krivuljama

   $$x^2 - 4x = y, \quad x = y.$$

   Odredite površinu tog skupa.

   (b) (10 bodova) Izračunajte trostruki integral

   $$\iiint\limits_D \frac{xy}{x^2+y^2}\,dx\,dy\,dz,$$

   pri čemu je $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq y,\ x^2+y^2 \leq 9\}$.

$3a$ $3b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 7. 2. 2023.

3. (**ukupno 10 bodova**) Izračunajte vrijednost krivuljnog integrala

$$\int_C -x^3y\,dx + x^4\,dy,$$

pri čemu je krivulja C pozitivno orijentirani rub područja

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4,\ x \leq 0\}.$$