

--	--

Diferencijalni i integralni račun 2  
popravni kolokvij, 17.2.2020.

**Napomene:** Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora.

1. (ukupno 16 bodova):

(a) (8 bodova) Odredite radijus konvergencije reda potencija

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{20^n + n^{20}}{1 + \operatorname{arctg} n} x^n.$$

(b) (8 bodova) Koristeći Taylorov teorem, izračunajte limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^3) - x^3}{x^5}.$$

--	--

Diferencijalni i integralni račun 2  
popravni kolokvij, 17.2.2020.

2. (ukupno 16 bodova)

(a) (10 bodova) Nađite globalne ekstreme funkcije

$$f(x, y) = e^x y^2 - 5e^x y + 6e^x - y^2 + 5y$$

na domeni  $A = [0, \ln 2] \times [0, 6]$ .

(b) (6 bodova) Izračunajte površinu skupa omeđenog krivuljama  $x = \sin y$  i  $x = y^2 - \pi y$ .

--	--

Diferencijalni i integralni račun 2  
popravni kolokvij, 17.2.2020.

3. (ukupno 18 bodova)

(a) (9 bodova) Koristeći Greenov teorem, izračunajte integral

$$\int_C y^2 dx + \sqrt{x^2 + y^2} dy,$$

gdje je  $C$  rub skupa  $\Omega = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \leq 0\}$  usmjeren suprotno od smjera kazaljke na satu.

(b) (9 bodova) Izračunajte

$$\iiint_{\Omega} xyz \, dx dy dz,$$

gdje je  $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \geq 1, (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, 0 \leq z \leq \frac{x}{x^2 + y^2}\}$ .

## Diferencijalni i integralni račun 2

popravni kolokvij, 17.2.2020.

4. (10 bodova) Dokažite da sljedeći red konvergira i izračunajte sumu reda

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)}.$$

5. (10 bodova) Ima li funkcija

$$f(x, y) = \frac{\sin x}{\cos y}$$

limes u  $(0, \pi/2)$ ? Odgovor obrazložite.

6. (10 bodova) Vivijanijeva krivulja zadana je kao presjek ploha  $x^2 + y^2 = z^2$  i  $y = z^2$ . Dokažite da Vivijanijeva krivulja leži na sferi polumjera 1 sa središtem u  $(0, 1, 0)$ .
7. (10 bodova) Zadana je ploha u sferičkim koordinatama  $\rho = 2 \operatorname{tg} \theta \sin \phi \cos \theta$ , gdje je  $\phi$  polarni kut ili kolatituda. Napišite jednadžbu te plohe u pravokutnim koordinatama te je opišite i skicirajte.
8. (10 bodova) Neka je  $\Omega$  područje unutar elipse  $x^2 + 2xy + \frac{3}{2}y^2 - 2y = 2$ . Izrazite površinu od  $\Omega$  kao dvostruki integral u varijablama  $u = x + y$ ,  $v = y - 2$ . Integral ne trebate računati.

--	--

## Diferencijalni i integralni račun 2

popravni kolokvij, 17.2.2020.

**Napomene:** Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora.

1. (ukupno 16 bodova):

(a) (8 bodova) Odredite radijus konvergencije reda potencija

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + \operatorname{arccotg} n}{n^{20} + 20^n} x^n.$$

(b) (8 bodova) Koristeći Taylorov teorem, izračunajte limes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2) - x^2}{x^3}.$$

--	--

Diferencijalni i integralni račun 2  
popravni kolokvij, 17.2.2020.

2. (ukupno 16 bodova)

(a) (10 bodova) Nađite globalne ekstreme funkcije

$$f(x, y) = e^y x^2 - 6e^y x + 5e^y - x^2 + 6x$$

na domeni  $A = [0, 6] \times [0, \ln 2]$ .

(b) (6 bodova) Izračunajte površinu skupa omeđenog krivuljama  $x = \sin y$  i  $x = 2y^2 - 2\pi y$ .

--	--

Diferencijalni i integralni račun 2  
popravni kolokvij, 17.2.2020.

3. (ukupno 18 bodova)

(a) (9 bodova) Koristeći Greenov teorem, izračunajte integral

$$\int_C \sqrt{x^2 + y^2} dx + x^2 dy,$$

gdje je  $C$  rub skupa  $\Omega = \{(x, y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y \leq 0\}$  usmjeren suprotno od smjera kazaljke na satu.

(b) (9 bodova) Izračunajte

$$\iiint_{\Omega} x^3 y z dx dy dz,$$

gdje je  $\Omega = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 \geq 1, (x - 1)^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0, 0 \leq z \leq \frac{1}{x^2 + y^2}\}$ .

## Diferencijalni i integralni račun 2

popravni kolokvij, 17.2.2020.

4. (10 bodova) Dokažite da sljedeći red konvergira i izračunajte sumu reda

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

5. (10 bodova) Ima li funkcija

$$f(x, y) = \frac{\cos x}{\sin y}$$

limes u  $(\pi/2, 0)$ ? Odgovor obrazložite.

6. (10 bodova) Vivijanijeva krivulja zadana je kao presjek ploha  $x^2 + y^2 = z^2$  i  $y = z^2$ . Koristeći činjenicu, koju ne morate dokazivati, da se svaka točka plohe  $x^2 + y^2 = z^2$  može napisati u obliku  $(z \cos \theta, z \sin \theta, z)$  za neki  $\theta$ , nađite parametrizaciju Vivijanijeve krivulje u terminima parametra  $\theta$ .
7. (10 bodova) Zadana je ploha u sferičkim koordinatama  $\rho = 2 \cos \phi$ , gdje je  $\phi$  polarni kut ili kolatituda. Napišite jednadžbu te plohe u pravokutnim koordinatama te je opišite i skicirajte.
8. (10 bodova) Nađite preslikavanje  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  koje bijektivno preslikava krug  $u^2 + v^2 \leq 1$  na elipsu  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ . Koristeći zamjenu varijabli  $(x, y) \mapsto (u, v)$  izračunajte površinu elipse.