Kolegij *Studentska natjecanja*, ak. god. 2021./2022.
https://www.pmf.unizg.hr/math/predmet/snim_a

6. i 7. predavanje:

Paradoksalne dekompozicije

Ilja Gogić
http://web.math.pmf.unizg.hr/~ilja/

1 Uvod

Osnovni cilj ovih predavanja je dokazati slavni Banach-Tarskijev paradoks (BTP u daljnjem). On ukratko (i malo neformalno) kaže da se jedinična kugla $\mathbb{B}^3$ u $\mathbb{R}^3$ može particionirati na konačno mnogo dijelova od kojih se koristeći samo kruta gibanja (rotacije i translacije) mogu sastaviti dvije kugle identične početnoj.

Odmah istaknimo da je BTP "legitiman" teorem teorije ZFC (Zermelo-Fraenkelova teorija skupova s aksiomom izbora). Kao što ćemo uskoro vidjeti, dokaz BTP-a se esencijalno oslanja na *aksiom izbora* (eng. Axiom of Choice; AC u daljnjem). Prisjetimo se ukratko da AC garantira da za svaku nepraznu familiju nepraznih u parovima disjunktnih skupova postoji skup koji sadrži točno jedan element iz svakog skupa te familije.

Prvi dokaz BTP-a objavljen je 1924. godine u članku S. Banach, A. Tarski, *Sur la decomposition des ensembles de points en parties respectivement congruents*, Fundamenta Mathematicae, **6**, 244–277. Razlog zbog čega se BTP zove paradoksom leži u tome što je on u kontradikciji s osnovnom geometrijskom intuicijom. Naime, kruta gibanja bi intuitivno trebala čuvati volumen skupova. Dakle, ako je $\{E_1, \ldots, E_n\}$ particija od $\mathbb{B}^3$ koju garantira BTP zajedno s krutim gibanjima $g_1, \ldots, g_n$ od $\mathbb{R}^3$ tako da vrijedi

$$\mathbb{B}^3 = g_1E_1 \sqcup \ldots \sqcup g_kE_k = g_{k+1}E_{k+1} \sqcup \ldots \sqcup g_nE_n$$

za neko $1 < k < n$ (pri čemu $\sqcup$ označava disjunktnu uniju) onda imamo

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\mathbb{B}^3) &= \mathrm{vol}(E_1 \sqcup \ldots \sqcup E_k \sqcup E_{k+1} \sqcup \ldots \sqcup E_n) \\
&= \mathrm{vol}(E_1) + \ldots + \mathrm{vol}(E_k) + \mathrm{vol}(E_{k+1}) + \ldots + \mathrm{vol}(E_n) \\
&= \mathrm{vol}(g_1E_1) + \ldots + \mathrm{vol}(g_kE_k) + \mathrm{vol}(g_{k+1}E_{k+1}) + \ldots + \mathrm{vol}(g_nE_n) \\
&= \mathrm{vol}(g_1E_1 \sqcup \ldots \sqcup g_kE_k) + \mathrm{vol}(g_{k+1}E_{k+1} \sqcup \ldots \sqcup g_nE_n) \\
&= \mathrm{vol}(\mathbb{B}^3) + \mathrm{vol}(\mathbb{B}^3),
\end{aligned}$$

tj. $\mathrm{vol}(\mathbb{B}^3) = 0$ što je apsurdno. Razlog zbog čega gornji račun nije valjan leži u tome što ne postoji funkcija volumena koja bi bila definirana na svim podskupovima od $\mathbb{R}^3$. Drugim riječima postoje tzv. *neizmjerivi skupovi*, odnosno podskupovi od $\mathbb{R}^3$ za koje pojam volumena nije dobro definiran. Stoga, bilo koja particija od $\mathbb{B}^3$ koja zadovoljava iskaz BTP-a mora sadržavati barem jedan neizmjeriv skup. Napomenimo da neizmjerive podskupove ne možemo efektivno konstruirati (npr. koristeći neki algoritam); do njih dolazimo isključivo egzistencijalnim argumentom, npr. korištenjem već spomenutog AC-a ili slabijih tvrdnji kao npr. Hahn-Banachov teorem. Također napomenimo da je američki matematičar Robert M. Solovay 1970. godine konstruirao model teorije ZF u kojem je svaki podskup od $\mathbb{R}^N$ izmjeriv. Posljedično, BTP se ne može dokazati unutar same teorije ZF.

Koristeći AC najprije ćemo dokazati sljedeći rezultat:

Teorem 1. *(AC) Ne postoji funkcija $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \to [0, +\infty]$ koja zadovoljava sljedeća četiri uvjeta:*

(A1) Za svaki N-dimenzionalni kvadar $P = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_N, b_N]$ vrijedi $\mu(P) = (b_1 - a_1) \cdots (b_N - a_N)$.

(A2) $\mu(\emptyset) = 0$.

(A3) (σ-aditivnost) Za svaki niz $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ u parovima disjunknih podskupova od $\mathbb{R}^N$ vrijedi $\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

(A4) (translaciona invarijantnost) Za sve $A \subset \mathbb{R}^N$ i $x \in \mathbb{R}^N$ vrijedi $\mu(A+x) = \mu(\{a+x : a \in A\}) = \mu(A)$.

Primijetimo da (A1)-(A4) predstavljaju prirodna svojstva koja bismo očekivali da zadovoljava funkcija N-dimenzionalnog volumena na $\mathbb{R}^N$.

Dokaz teorema 1. Radi jednostavnosti oznaka dokaz provodimo u dimenziji $N = 1$. U višim dimenzijama dokaz je potpuno analogan.

Pretpostavimo da postoji funkcija $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0, +\infty]$ koja zadovoljava svojstva (A1)-(A4). Primijetimo da je takva funkcija μ monotona, tj.

$$\text{Ako su } A, B \subset \mathbb{R} \text{ takvi da je } A \subset B \text{ onda je } \mu(A) \le \mu(B). \tag{1}$$

Zaista, koristeći (A3) i nenegativnost od μ imamo $\mu(B) = \mu(A \sqcup (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \ge \mu(A)$.

Definirajmo relaciju $\sim$ na $\mathbb{R}$ na sljedeći način:

$$x \sim y \quad :\Longleftrightarrow \quad x - y \in \mathbb{Q}.$$

Tada je $\sim$ očito relacija ekvivalencije na $\mathbb{R}$ čije su klase oblika $x + \mathbb{Q}$, $x \in \mathbb{R}$. Budući da je $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$, svaka takva klasa očito siječe segment $[0, 1]$. Stoga, prema (AC), postoji podskup V od $[0, 1]$ takav da je $\bigsqcup_{q \in \mathbb{Q}} (q + V) = \mathbb{R}$ (tzv. *Vitalijev skup*). Tvrdimo da $\mu(V)$ nije dobro definiran broj u $[0, +\infty]$.

Zaista, neka je $\{q_1, q_2, \ldots\}$ enumeracija od $[-1, 1] \cap \mathbb{Q}$. Tada su skupovi $V_k := V + q_k$ $(k \in \mathbb{N})$ u parovima disjunktni te vrijedi

$$[0, 1] \subset \bigsqcup_{k=1}^{\infty} V_k \subset [-1, 2]. \tag{2}$$

Druga inkluzija u (2) je očita, dok prva slijedi iz činjenice da za $r \in [0, 1]$ postoji $v \in V$ takav da je $r - v = q_k \in [-1, 1] \cap \mathbb{Q}$ za neko $k \in \mathbb{N}$, tako da je $r = v + q_k \in V_k$. Sada iz (A1), (A3), (2) i (1) dobivamo

$$1 \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(V_k) \le 3.$$

No prema (A4) μ je translaciono invarijantna, pa je $\mu(V_k) = \mu(V)$ za sve $k \in \mathbb{N}$. Dakle,

$$1 \le \sum_{k=1}^{\infty} \mu(V) \le 3,$$

što je nemoguće, jer je suma $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(V)$ ili jednaka 0 (ako je $\mu(V) = 0$) ili $+\infty$ (ako je $\mu(V) > 0$). $\square$

Iako zadovoljavajuću funkciju volumena/mjere nije moguće definirati na svim podskupovima od $\mathbb{R}^N$, moguće ju je definirati na širokoj klasi podskupova od $\mathbb{R}^N$ koja sadrži sve N-dimenzionalne kvadre te je zatvorena na uzimanje komplemenata te prebrojivih unija i presjeka. Više o tome čut ćete na kolegiju "Mjera i integral".

2 Paradoksalni skupovi

U daljnjem ćemo pretpostaviti da je X neprazan skup te da je G podgrupa grupe bijekcija na X. Dakle G je familija bijekcija s X na X koja sadrži identitetu (koju kratko označavamo s e; dakle $e(x) = x$ za sve $x \in X$) te je zatvorena na formiranje kompozicija i uzimanja inverza (tj. ako su $g, h \in G$ onda je $gh = g \circ h \in G$ te $g^{-1} \in G$ za sve $g \in G$). Grupa G prirodno djeluje na skupu X s $(g, x) \mapsto gx := g(x)$. To djelovanje ćemo označiti s $G \curvearrowright X$.

Definicija 2 (Paradoksalan skup)**.** *Za podskup E od X kažemo da je G-**paradoksalan** (ili samo paradoksalan) ako postoji:*

(a) particija od E u konačno mnogo dijelova $\{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$,

(b) kolekcija $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ elemenata od G i

(c) prirodan broj $1 \le m < n$ takav da obje familije $\{g_j E_j\}_{j=1}^{m}$ i $\{g_j E_j\}_{j=m+1}^{n}$ čine particiju od E.

Ako želimo naglasiti broj dijelova n iz početne particije, onda ćemo reći da je E n-**paradoksalan**. Za samu grupu G ćemo reći da je **paradoksalna** ako je G paradoksalna s obzirom na djelovanje na samoj sebi lijevim translacijama $(g, h) \mapsto gh$.

Primjer 3 (Slobodna grupa $\mathbb{F}_2$ je paradoksalna)**.** Neka je $\mathbb{F}_2$ slobodna grupa s dva generatora; označimo ih s a i b. Ukratko, $\mathbb{F}_2$ se sastoji prazne riječi e te svih "reduciranih riječi" oblika $x_1 x_2 \cdots x_n$ za $n \in \mathbb{N}$ pri čemu je svaki element x_i iz skupa $\{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ uz uvjet da nikoja dva susjedna elementa x_i i x_{i+1} nisu "međusobno inverzni". Množenje na $\mathbb{F}_2$ definirano je kao konkatenacija riječi nad kojom je zatim izvršena "redukcija" (npr. $(aba^{-1})(ab^{-1}ab) = aab$, $(ab^{-1})(ba^{-1}) = e$). Uz tu operaciju $\mathbb{F}_2$ je prebrojiva nekomutativna grupa s jediničnim elementom e.

Tvrdimo da je $\mathbb{F}_2$ paradoksalna grupa. Zaista, za $x \in \{a, a^{-1}, b, b^{-1}\}$ s $W(x)$ označimo skup svih (reduciranih) riječi iz $\mathbb{F}_2$ koje počinju sa simbolom x. Stavimo

$$E_1 := W(a) \setminus \{a, a^2, a^3, \ldots\}, \quad E_2 := W(a^{-1}) \sqcup \{e, a, a^2, a^3\}, \quad E_3 := W(b) \quad \text{i} \quad E_4 := W(b^{-1}).$$

Tada je očito $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ particija od $\mathbb{F}_2$ takva da vrijedi

$$\mathbb{F}_2 = E_1 \sqcup E_2 \sqcup E_3 \sqcup E_4 = E_1 \sqcup aE_2 = E_3 \sqcup bE_4.$$

Posebno, $\mathbb{F}_2$ je 4-paradoksalna.

Zadatak 1. Ako je X G-paradoksalan skup, dokažite da X ne dopušta konačno aditivnu G-invarijantnu vjerojatnosnu mjeru definiranu na čitavom partitivnom skupu $\mathcal{P}(X)$, tj. ne postoji funkcija $\mu : \mathcal{P}(X) \to [0, 1]$ koja zadovoljava sljedeća tri svojstva:

(a) (normiranost) $\mu(X) = 1$.

(b) (G-invarijantnost) $\mu(gA) = \mu(A)$ za svaki $A \subset X$ i $g \in G$.

(c) (konačna aditivnost) Za svaki konačan niz $(A_k)_{k=1}^n$ u parovima disjunktnih podskupova od X vrijedi $\mu\left(\bigsqcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$.

Zadatak 2. (a) Dokažite da za svako djelovanje $G \curvearrowright X$ ambijentalni skup X ne može biti n-paradoksalan za $n < 4$.

(b) Nađite primjer djelovanja $G \curvearrowright X$ sa svojstvom da postoji podskup od X koji je 2-paradoksalan.

Definicija 4. *Za djelovanje $G \curvearrowright X$ kažemo da je* ***slobodno*** *na podskupu E od X ako niti jedan element iz G osim identitete $e \in G$ nema fiksnu točku unutar E.*

Teorem 5 (Teorem transferencije (AC))**.** *Pretpostavimo da je $G \curvearrowright X$ slobodno djelovanje. Ako je grupa G paradoksalna, onda je i X G-paradoksalan skup.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\{E_j\}_{j=1}^n$ particija od G s odgovarajućim elementima $g_1, \ldots, g_n \in G$ te brojem $1 \le m < n$ tako da su $\{g_j E_j\}_{j=1}^m$ i $\{g_j E_j\}_{j=m+1}^n$ također particije od G. Želimo pokazati da se ta situacija može prenijeti (transferirati) na X.

Za $x \in X$ neka je $Gx := \{gx \ : g \in G\}$ pripadna G**-orbita** od x. Kao što znamo, G-orbite particioniraju X, pa prema (AC) postoji podskup M od X koji iz svake G-orbite sadrži po točno jedan element. Dakle, $X = \bigsqcup_{m \in M} Gm$. Za $g \in G$ nazovimo skup $gM = \{gm \ : m \in M\}$ **koorbita** od g.

Tvrdimo da koorbite particioniraju X, tj. $X = \bigsqcup \{gM \ : g \in G\}$. Zaista, unija koorbita očito daje čitav X ($\bigcup_{g \in G} gM = GM = X$). Dakle, ostaje pokazati da su koorbite u parovima disjunktne. U tu svrhu, pretpostavimo da su $g, h \in G$ takvi da je $gM \cap hM \neq \emptyset$. Tada postoje $m_1, m_2 \in M$ takvi da je $gm_1 = hm_2$, odakle slijedi $(h^{-1}g)m_1 = m_2$ pa m_2 pripada G-orbiti od m_1. Prema definiciji našeg izbornog skupa M mora biti $m_1 = m_2$. Dakle, element $m_1 = m_2$ je fiksna točka od $h^{-1}g$ pa, budući da G djeluje slobodno na X, slijedi $h^{-1}g = e$ odnosno $h = g$. Posebno, $gM = hM$. Time smo pokazali da su za svaka dva različita elementa $g, h \in G$ koorbite gM i hM disjunktne kao što smo i željeli.

Sada za proizvoljni $A \subset G$ definirajmo

$$A^* := AM = \{am : \ a \in A, \ m \in M\}.$$

Iz dokazanog je jasno da je za svaku particiju $\{A_j\}_{j=1}^m$ od G familija $\{A_j^*\}_{j=1}^m$ particija od X. Posebno, particije $\{E_j\}_{j=1}^n$, $\{g_j E_j\}_{j=1}^m$ i $\{g_j E_j\}_{j=m+1}^n$ od G možemo redom prenijeti do particija $\{E_j^*\}_{j=1}^n$, $\{(g_j E_j)^*\}_{j=1}^m$ i $\{(g_j E_j)^*\}_{j=m+1}^n$ od X, čime smo pokazali G-paradoksalnost od X. □

Korolar 6. *Svaka grupa koja sadrži paradoksalnu podgrupu je i sama paradoksalna.*

Dokaz. Neka je H podgrupa grupe G. Tada H djeluje na G lijevim translacijama $(h, g) \mapsto hg$ i to djelovanje je očito slobodno. Iz teorema 5 direktno slijedi da ako je H paradoksalna, tada je i G paradoksalna. □

Zadatak 3. Pretpostavimo da je $G \curvearrowright X$ slobodno djelovanje. Dokažite da je presjek svake dvije orbite i koorbite jednočlan skup.

Zadatak 4 (Obrat teorema 5)**.** Dokažite da ako je djelovanje $G \curvearrowright X$ paradoksalno, onda je G nužno paradoksalna grupa (ovdje nam nije potrebna pretpostavka da je djelovanje $G \curvearrowright X$ slobodno).

Zadatak 5. Za dano djelovanje $G \curvearrowright X$ označimo s C skup svih točaka od X koje fiksira neki element iz G različit od e. Dokažite da su C i $X \setminus C$ G-invarijantni skupovi, tj. $GC \subset C$ i $G(X \setminus C) \subset X \setminus C$. Dakle, G (restringirana na $X \setminus C$) djeluje slobodno na $X \setminus C$.

3 Specijalne ortogonalne grupe $SO(2)$ i $SO(3)$

Jedan od ključnih koraka u dokazu Banach-Tarskijevog teorema je dokaz činjenice da je grupa rotacija oko ishodišta prostora $\mathbb{R}^3$ paradoksalna (Propozicija 18 iz iduće točke). U ovoj točki ćemo pokazati da grupe rotacija oko ishodišta prostora $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ možemo redom identificirati s tzv. specijalnim ortogonalnim grupama $SO(2)$ i $SO(3)$ (Propozicije 14 i 15).

Promotrimo unitarni prostor $\mathbb{R}^N$ sa standarnim skalarnim produktom

$$\langle (x_1, \ldots, x_N), (y_1, \ldots, y_N) \rangle = \sum_{k=1}^{N} x_k y_k$$

i induciranom normom

$$\|(x_1, \ldots, x_N)\| = \sqrt{\langle (x_1, \ldots, x_N), (x_1, \ldots, x_N) \rangle} = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} x_k^2}.$$

Kao i obično, za svako $1 \leq j \leq N$ s e_j označavamo vektor iz $\mathbb{R}^N$ čije su sve koordinate jednake 0 osim j-te gdje stoji 1. Tada je $\{e_1, \ldots, e_N\}$ ortonormirana baza za $\mathbb{R}^N$. S $M_N(\mathbb{R})$ označavamo skup svih realnih kvadratnih matrica reda N. Jediničnu matricu u $M_N(\mathbb{R})$ označavamo s I, a za $A \in M_N(\mathbb{R})$ s A^t označavamo pripadnu transponiranu matricu. Nadalje, $\mathbb{R}^N$ na uobičajen način poistovjećujemo sa stupčanim matricama, preko identifikacije

$$(x_1, \ldots, x_N) \quad \longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix},$$

tako da je svaki linearni operator na $\mathbb{R}^N$ oblika $v \mapsto Av$ za neku matricu $A \in M_N(\mathbb{R})$.

Definicija 7. *Za matricu $A \in M_N(\mathbb{R})$ kažemo da je **ortogonalna** ako vrijedi $A^t A = AA^t = I$.*

Skup svih ortogonalnih matrica u $M_N(\mathbb{R})$ označavamo s $O(N)$. Lako se vidi da je $O(N)$ grupa s obzirom na (standardno) množenje matrica.

Dokaz sljedeće tvrdnje može se naći u standardnim udžbenicima iz Linearne algebre (vidjeti npr. D. Bakić, *Linearna algebra*, Školska knjiga, Zagreb, 2008.)

Propozicija 8. *(a) Matrica $A \in M_N(\mathbb{R})$ je ortogonalna ako i samo ako njeni stupci čine ortonormiranu bazu za $\mathbb{R}^N$.*

(b) Ako je $A \in O(N)$ tada vrijedi $\langle Av, Aw \rangle = \langle v, w \rangle$ za sve $v, w \in \mathbb{R}^N$.

Definicija 9. *Za (ne nužno linearno) preslikavanje $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ kažemo da je **izometrija** ako T čuva udaljenost, tj. ako vrijedi*

$$\|T(v) - T(w)\| = \|v - w\| \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^N.$$

Primjer 10. (a) Svaka translacija $v \mapsto v + w$ ($w \in \mathbb{R}^N$) je izometrija.

(b) Ako je $A \in O(N)$ tada je preslikavanje $v \mapsto Av$ izometrija.

(c) Kompozicija izometrija je izometrija. Posebno, svako preslikavanje $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ oblika $T : v \mapsto Av + w$, gdje je $A \in O(N)$ i $w \in \mathbb{R}^N$ je izometrija.

Štoviše, svaka izometrija na $\mathbb{R}^N$ se može na jedinstven način prikazati kao kompozicija ortogonalnog preslikavanja i translacije:

Teorem 11. *Preslikavanje $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ je izometrija ako i samo ako postoji ortogonalna matrica $A \in O(N)$ takva da vrijedi*

$$T(v) = Av + T(0) \quad \forall v \in \mathbb{R}^N.$$

Matrica A je jedinstveno određena s T.

U dokazu teorema 11 koristit ćemo sljedeću tvrdnju:

Propozicija 12. *Pretpostavimo da je $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ izometrija takva da je $T(0) = 0$. Tada vrijedi*

$$\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle \quad \forall v, w \in \mathbb{R}^N.$$

Posljedično, T je linearan operator te postoji ortogonalna matrica $A \in O(N)$ takva da je $T(v) = Av$ za sve $v \in \mathbb{R}^N$.

Zadatak 6. Dokažite propoziciju 12.

Dokaz teorema 11. Dokaz jednog smjera slijedi iz primjera 10. Pretpostavimo da je $T : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ izometrija. Tada je preslikavanje $T' : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ definirano s $T'(v) = T(v) - T(0)$ također izometrija i $T'(0) = 0$. Prema propoziciji 12 postoji ortogonalna matrica $A \in O(N)$ takva da je $T'(v) = Av$, odnosno $T(v) = Av + T(0)$ za sve $v \in \mathbb{R}^N$. Jedinstvenost matrice A je očita. □

Koristeći Binet-Cauchyjev teorem i činjenicu da je determinanta invarijantna s obzirom na transponiranje, zaključujemo da je determinanta svake ortogonalne matrice jednaka ± 1.

Definicija 13. *Za matricu $A \in O(N)$ kažemo da je* ***specijalna ortogonalna matrica*** *ako je* $\det A = 1$.

Skup svih specijalnih ortogonalnih matrica reda N označavamo s $SO(N)$. Očito je $SO(N)$ podgrupa od $O(N)$.

Sada ćemo pobliže opisati strukturu grupa $SO(2)$ i $SO(3)$.

Propozicija 14. *(a) Grupa $SO(2)$ sastoji se točno od svih rotacija od $\mathbb{R}^2$ oko ishodišta.*

(b) Ako je $A \in O(2)$ s $\det A = -1$ tada je $A = BC$, gdje je C rotacija od $\mathbb{R}^2$ oko ishodišta, a B refleksija oko nekog pravca u $\mathbb{R}^2$ koji prolazi ishodištem.

Dokaz. Svaka matrica $A \in O(2)$ preslikava par kanonskih vektora (e_1, e_2) u ortogonalni par (v, w) jediničnih vektora od $\mathbb{R}^2$. Neka je $\theta \in [0, 2\pi\rangle$ takav da je v dobiven od e_1 rotacijom za kut θ obrnuto od smjera kazaljke na satu. Imamo dva moguća slučaja:

(i) Vektor w je dobiven rotacijom od e_2 za isti kut θ. U tom slučaju je $\det A = 1$ i A je rotacija od $\mathbb{R}^2$ za kut θ oko ishodišta.

(ii) Vektor w je suprotne orijentacije od vektora w iz 1. slučaja. Tada je $A = BC$, pri čemu je C rotacija oko ishodišta za kut θ, a B refleksija oko pravca kroz ishodište s vektorom smjera v. Posebno, $\det A = -1$.

□

Dakle, svaka matrica iz $SO(2)$ je oblika

$$A_\theta := \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

za neki $\theta \in [0, 2\pi\rangle$. Štoviše ako s $\mathbb{T}$ označimo grupu kružnice (tj. skup svih kompleksnih brojeva modula 1 sa standardnim množenjem kompleksnih brojeva), tada preslikavanje $e^{i\theta} \mapsto A_\theta$ definira izomorfizam između grupa $\mathbb{T}$ i $SO(2)$.

Propozicija 15. *Grupa $SO(3)$ sastoji se točno od svih rotacija od $\mathbb{R}^3$ s centrom u ishodištu.*

Napomena 16. Svaka rotacija od $\mathbb{R}^3$ s centrom u ishodištu fiksira neki pravac kroz ishodište i djeluje kao rotacija oko tog pravca (tzv. os rotacije).

Dokaz propozicije 15. Pretpostavimo da je $A \in SO(3)$. Kako bismo našli os rotacije od A trebamo pokazati da jednadžba $Av = v$ ima netrivijalno rješenje $v \in \mathbb{R}^3$, odnosno da je 1 svojstvena vrijednost od A. Ekvivalentno, tvrdimo da je $\det(A - I) = 0$. Zaista, kako je $AA^t = I$ imamo

$$(A - I)A^t = AA^t - A^t = I - A^t = -(A - I)^t.$$

Kako je $\det A = \det A^t = 1$, koristeći gornju jednakost dobivamo

$$\begin{aligned}\det(A - I) &= \det(A - I)\det(A^t) = \det[(A - I)A^t] = \det[-(A - I)^t] = (-1)^3 \det(A - I)^t \\ &= -\det(A - I).\end{aligned}$$

Dakle, $\det(A - I) = 0$ kao što smo i tvrdili.

Neka je $v_1 \in \mathbb{R}^3$ jedinični vektor takav da je $Av_1 = v_1$ te neka je (v_2, v_3) ortonormirana baza za ortogonalni komplement E potprostora razapetog s v_1. Tada je (v_1, v_2, v_3) ortonormirana baza za $\mathbb{R}^3$ s obzirom na koju linearni operator $v \mapsto Av$ ima blok dijagonalni prikaz

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}, \tag{3}$$

gdje je B ortogonalna matrica reda 2. Posebno, A i B imaju istu determinantu 1, pa je $B \in SO(2)$. Prema propoziciji 14, B inducira na E rotaciju oko ishodišta.

Preostaje nam dokazati da je svaka rotacija T od $\mathbb{R}^3$ oko ishodišta reprezentirana matricom iz $SO(3)$. Zaista, kako je T izometrija i $T(0) = 0$, iz teorema 11 slijedi da postoji jedinstvena ortogonalna matrica $A \in O(3)$ takva da je $T(v) = Av$ za sve $v \in \mathbb{R}^3$. Budući da T fiksira neki pravac kroz ishodište, A mora biti ortogonalno slična matrici blok-dijagonalnog oblika (3) s $B \in SO(2)$. Dakle $A \in SO(3)$.

□

Zadatak 7. Ako je G grupa tada je njen **centar** $Z(G)$ definiran kao skup svih elemenata u G koji komutiraju sa svim ostalim elementima iz G, tj.

$$Z(G) = \{g \in G : \; gh = hg \; \forall h \in G\}.$$

U ovisnosti o prirodnom broju N odredite $Z(SO(N))$.

Na kraju ove točke napišimo (standardne) matrične prikaze rotacija prostora $\mathbb{R}^3$ oko koordinatnih osi:

1. Rotacija za kut θ oko z-osi
$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
2. Rotacija za kut θ oko x-osi
$$R_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$
3. Rotacija za kut θ oko y-osi
$$R_y = \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

4 Paradoksalnost grupe $SO(3)$ i Hausdorffov paradoks

Cilj ove točke nam je dokazati paradoksalnost specijalne ortogonalne grupe $SO(3)$ (propozicija 18). Kao posljedicu te činjenice i Teorema transferencije (teorem 5) dobivamo sljedeći rezultat:

Teorem 17 (Hausdorffov paradoks, 1914.). *Postoji prebrojiv podskup C jedinične sfere $\mathbb{S}^2$ u $\mathbb{R}^3$ takav da je skup $\mathbb{S}^2 \setminus C$ $SO(3)$-paradoksalan.*

Propozicija 18. *Grupa $SO(3)$ sadrži podgrupu koja je izomorfna slobodnoj grupi $\mathbb{F}_2$.*

Napomena 19. Drugim riječima, propozicija 18 tvrdi da postoje dvije rotacije $\Gamma, \Delta \in SO(3)$ sa svojstvom da se jedinična matrica ne može dobiti "množenjem slova" neprazne reducirane riječi alfabeta $\mathcal{A} = \{\Gamma, \Delta, \Gamma^{-1}, \Delta^{-1}\}$. Dakle, ako je $A_1 A_2 \cdots A_n$ produkt nekih matrica iz skupa $\mathcal{A}$, pri čemu nikoje dvije susjedne matrice A_i i A_{i+1} nisu međusobno inverzne, tada $A_1 A_2 \cdots A_n \neq I$.

Dokaz propozicije 18. Definirajmo redom matrice $\Gamma, \Delta \in SO(3)$ kao prikaz rotacija (u standardnoj bazi za $\mathbb{R}^3$) za kut $\theta = \arcsin(\frac{4}{5})$ oko z-osi, odnosno za isti kut θ oko x-osi. Dakle:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & 0 \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ 0 & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Budući da su Γ i Δ ortogonalne matrice, njihovi inverzi su njihovi transponati. Dakle, tvrdnja da reducirana riječ duljine n alfabeta $\{\Gamma, \Delta, \Gamma^{-1}, \Delta^{-1}\}$ ne predstavlja jediničnu matricu I je ekvivalentna tvrdnji da odgovarajuća riječ u 5Γ, 5Δ i njihovim transponatima ne predstavlja matricu $5^n I$. Kako bismo to dokazali, dovoljno je uvjeriti se da niti jedna takva riječ ne predstavlja matricu čiji su svi elementi djeljivi s 5, odnosno da nad poljem $\mathbb{Z}_5$ (ostataka modulo 5) niti jedna takva riječ ne predstavlja nul-matricu.

Nad poljem $\mathbb{Z}_5$ naše matrice 5Γ, 5Δ i njihovi transponati redom postaju

$$R = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R' = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}, \quad S' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Nazovimo riječ alfabeta $\{R, R', S, S'\}$ **dopustivom** ako se u njoj slova R i R' te S i S' ne pojavljuju jedna pored drugih.

Cilj nam je pokazati da niti jedna dopustiva riječ u tim novim matricama ne predstavlja nul-matricu. Slično kao i prije, uređenu trojku iz $\mathbb{Z}_5^3$ ćemo poistovijetiti s odgovarajućom stupčanom matricom, a kvadratnu matricu A reda 3 nad $\mathbb{Z}_5$ s linearnim operatorom $v \mapsto Av$ na $\mathbb{Z}_5^3$.

Tvrdimo da je jezgra svake dopustive riječi alfabeta $\{R, R', S, S'\}$ jednaka jezgri svog zadnjeg slova (dakle sigurno nije jednaka čitavom prostoru $\mathbb{Z}_5^3$). Zaista, svaka od matrica R, R', S, S' ima jednodimenzionalnu sliku odn. dvodimenzionalnu jezgru (teorem o rangu i defektu). Lako se provjeri da je presjek slika "R-matrica" i jezgri "S-matrica" nul-prostor. Analogno, presjek jezgri "R-matrica" i slika "S-matrica" je nul-prostor. Koristeći tu činjenicu, dokaz zadnje tvrdnje možemo lako provesti indukcijom po duljini riječi n. Za $n = 1$ tvrdnja je trvijalna. Pretpostavimo da je jezgra svake dopustive riječi alfabeta $\{R, R', S, S'\}$ duljine $n \geq 1$ jednaka jezgri svog zadnjeg slova. Želimo pokazati da isto vrijedi za sve dopustive riječi duljine $n+1$. Neka je W jedna takva riječ. Označimo zadnje slovo od W s A, dakle $W = VA$ gdje je V dopustiva riječ duljine n istog alfabeta. Tada za $x \in \mathbb{Z}_5^3$ imamo

$$x \in \ker W \iff VAx = 0 \iff Ax \in \ker V \cap \operatorname{Im} A. \tag{5}$$

Budući da je W dopustiva riječ, zadnje slovo od V, nazovimo ga s B, sigurno nije A' (uz konvenciju $R'' = R$ i $S'' = S$). Prema pretpostavci indukcije $\ker V = \ker B$, pa je $\ker B \cap \operatorname{Im} A = \{0\}$. Odavde i iz (5) slijedi inkluzija $\ker W \subset \ker A$. Budući da je obratna inkluzija trivijalno zadovoljena, zaključujemo da je $\ker W = \ker A$ kao što smo i tvrdili. □

Dokaz teorema 17. Sfera $\mathbb{S}^2$ je očito invarijantna s obzirom na djelovanje grupe $SO(3)$. Neka su $\Gamma, \Delta \in SO(3)$ kao u (4). Označimo s G podgrupu od $SO(3)$ generiranu tim matricama. Prema propoziciji 18, G je izomorfna slobodnoj grupi $\mathbb{F}_2$, pa je G također paradoksalna. Nadalje, G je prebrojiva i svaki njen element $A \neq I$ ima točno dvije fiksne točke na $\mathbb{S}^2$ (točke presjeka pripadne osi rotacije s $\mathbb{S}^2$). Stoga je skup svih fiksnih točaka takvih elemenata A na $\mathbb{S}^2$ prebrojiv. Prema zadaktu 5 G djeluje slobodno na $\mathbb{S}^2 \setminus C$. Stoga, prema Teoremu transferencije (teorem 5), skup $\mathbb{S}^2 \setminus C$ je G-paradoksalan, pa je onda svakako i $SO(3)$-paradoksalan. □

Zadatak 8. Dokažite da grupa $SO(2)$ nije paradoksalna.

Napomena 20. (a) Može se dokazati da niti jedna Abelova grupa nije paradoksalna.

(b) Za grupu G kažemo da je **rješiva** ako postoji konačan niz normalnih podgrupa

$$\{e\} = G_0 \leq G_1 \leq \cdots \leq G_k = G$$

takav da je svaka kvocijentna grupa G_j / G_{j-1} Abelova. Može se dokazati da rješive grupe nisu paradoksalne.

Zadatak 9. Pozivajući se na napomenu 20 zaključite da grupa $O(2)$ nije paradoksalna.

5 Ekvidekompozabilnost

U prošloj točki smo dokazali Hausdorffov paradoks (teorem 17) koji nam kaže da ako iz jedinične sfere $\mathbb{S}^2$ u $\mathbb{R}^3$ uklonimo odgovarajući prebrojiv podskup, onda je ostatak $SO(3)$-paradoksalan. U idućoj točki ćemo pokazati, koristeći tzv. "apsorpcijsku theniku" (koja je slična dokazu paradoksalnosti grupe $\mathbb{F}_2$; vidjeti primjer 3), da je čitava sfera $\mathbb{S}^2$ $SO(3)$-paradoksalna. Kako bismo to efikasno napravili, bit će nam od koristi nova terminologija koju ćemo sada uvesti.

Tokom čitave ove točke G će označavati podgrupu grupe bijekcija na skupu X.

Definicija 21 (Ekvidekompozabilnost)**.** *Neka su E i F dva podskupa od X. Kažemo da je E **ekvidekompozabilan** s F ako postoji prirodan broj n, particija $\{E_i\}_{i=1}^n$ od E, particija $\{F_i\}_{i=1}^n$ od F te elementi $g_1, \ldots, g_n \in G$ tako da vrijedi $F_i = g_i E_i$ za sve $1 \leq i \leq n$.*

Jasno je da je pojam ekvidekompozabilnosti simetričan, tj. E je ekvidekompozabilan s F ako i samo ako je F ekvidekompozabilan s E. Zbog toga je opravdano reći da su "E i F ekvidekompozabilni". To označavamo s $E \overset{G}{\sim} F$ (ili samo $E \sim F$ kada se podrazumijeva o kojoj grupi G je riječ). Ako želimo naglasiti broj n, reći ćemo da su E i F **n-ekvidekompozabilni** i pisat ćemo $E \sim_n F$.

Propozicija 22. *Ekvidekompozabilnost je relacija ekvivalencije na partitivnom skupu $\mathcal{P}(X)$.*

Zadatak 10. Dokažite propoziciju 22.

Koristeći pojam ekvidekompozabilnosti možemo na efikasan način reformulirati pojam paradoksalnosti kojeg smo uveli u definiciji 2. To iskazujemo u obliku propozicije (iako tu zapravo nemamo što za dokazati):

Propozicija 23. *Podskup E od X je G-paradoksalan ako i samo ako postoji particija od E u dva skupa A i B tako da vrijedi $A \sim E \sim B$.*

Kao što znamo, pojam "iste kardinalnosti" definiran je u terminima proizvoljnih bijekcija. Pojam "ekvidekompozabilnosti" je profinjenje tog koncepta, budući da je on definiran u terminima posebnih bijekcija:

Definicija 24 (Slagalica)**.** *Neka su E i F dva podskupa od X istog kardinaliteta. Za bijekciju $\varphi : E \to F$ kažemo da je **slagalica** (ili preciznije G-slagalica) ako postoji konačna particija $\{E_i\}_{i=1}^n$ od E i elementi $g_1, \ldots, g_n \in G$ takvi da vrijedi $\varphi|_E = g_i|_E$ (tj. φ i g_i se poklapaju na E_i) za sve $1 \leq i \leq n$.*

Koristeći gornju definiciju imamo sljedeću reformulaciju pojma ekvidekompozabilnosti, koju također iskazujemo u obliku propozicije:

Propozicija 25 (Ekvidekompozabilnost u terminima slagalica)**.** *Dva podskupa E i F od X su G-ekvidekompozabilna ako i samo ako postoji G-slagalica koja preslikava E na F.*

Činjenicu da je G-ekvidekompozabilnost relacija ekvivalencije možemo kratko objasniti u terminima slagalica:

- *Refleksivnost*: identiteta na X je slagalica.
- *Simetričnost*: inverz slagalice je slagalica.
- *tranzitivnost*: kompozicija slagalica je slagalica.

Korisnost pojma ekvidekompozabilnosti dolazi iz sljedeće činjenice koja nam kaže da se svojstvo paradoksalnosti prenosi na sve $\overset{G}{\sim}$-klase podskupova od X. Drugim riječima:

Korolar 26. *Neka su E i F dva G-ekvidekompozabilna podskupa od X. Tada je E G-paradoksalan ako i samo ako je F G-paradoksalan.*

Dokaz. Zbog simetričnosti tvrdnje dovoljno je pokazati samo jedan smjer. Pretpostavimo da je E G-paradoksalan. Prema propoziciji 23 postoje disjunktni podskupovi A i B od E takvi da je $A \sim E \sim B$. Kako je $E \sim F$, postoji slagalica $\varphi : E \to F$ (Propozicija 25). Budući da je φ bijekcija $A' = \varphi(A)$ i $B' = \varphi(B)$ su disjunktni podskupovi od F, a kako je restrikcija slagalica također slagalica, znamo da je $A' \sim A$ i $B' \sim B$. Koristeći tranzitivnost od $\sim$ dobivamo:

$$A' \sim A \sim E \sim F \quad i \quad B' \sim B \sim E \sim F \quad \Longrightarrow \quad A' \sim F \sim B',$$

pa je stoga F G-paradoksalan prema propoziciji 23. $\square$

6 Banach-Tarskijev paradoks za $\mathbb{S}^2$ i $\mathbb{B}^3$

Vođeni idejom ekvidekompozabilnosti sada smo spremni dokazati da je čitava sfera $\mathbb{S}^2$ $SO(3)$-paradoksalna kao i Banach-Tarskijev paradoks za $\mathbb{B}^3$. Glavni aparat kojeg ćemo koristiti u dokazu tih činjenice je sljedeća tvrdnja:

Lema 27 (Apsorpcijska lema)**.** *Neka je X skup, E podskup od X te C prebrojiv podskup od E. Neka je G komutativna podgrupa grupe bijekcija na X koja djeluje slobodno na C i koja C preslikava unutar E. Ako je G neprebrojiva a njena torzijska podgrupa najviše prebrojiva, onda su skupovi E i $E \setminus C$ G-ekvidekompozabilni.*

Napomena 28. Torzijska podgrupa $\mathrm{Tor}(G)$ Abelove grupe G je podgrupa od G koja se sastoji od svih elemenata iz G koji imaju konačan red. Dakle:

$$\mathrm{Tor}(G) = \{g \in G : \ \exists n \in \mathbb{N} \text{ takav da } g^n = e\}.$$

Lako se vidi da je $\mathrm{Tor}(G)$ zaista podgrupa od G.

Primjer 29. Ako je $\mathbb{T}$ grupa kružnice, onda je $\mathrm{Tor}(\mathbb{T}) = \{e^{i\pi q} : \ q \in \mathbb{Q}\}$.

Dokaz leme 27. Želimo dokazati sljedeću činjenicu:

Pomoćna tvrdnja. Postoji element $g \in G$ takav da je familija skupova $\{g^n(C) : \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$ u parovima disjunktna.

Naime, ukoliko pretpostavimo da je gornja tvrdnja istinita, stavimo $C_\infty := \bigsqcup_{n=0}^{\infty} g^n(C)$. Tada je $C_\infty \subset E$ i, budući da su skupovi $g^n(C)$ u parovima disjunktni, $g(C_\infty) \subset C_\infty \setminus C$. Stoga:

$$E \setminus C = (E \setminus C_\infty) \sqcup (C_\infty \setminus C) = (E \setminus C_\infty) \sqcup g(C_\infty) \overset{G}{\sim} (E \setminus C_\infty) \sqcup C_\infty = E.$$

Posebno, $E \setminus C \sim_2 E$.

Sada dokažimo pomoćnu tvrdnju. Najprije primijetimo da je dovoljno pokazati da postoji $g \in G$ takav da vrijedi $g^n(C) \cap C = \emptyset$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Zaista, ako to vrijedi, tada za dane $m, n \in \mathbb{N}$, $n > m$ imamo

$$g^n(C) \cap g^m(C) = g^m(g^{n-m}(C) \cap C) = g^m(\emptyset) = \emptyset.$$

Stoga, kako bismo završili dokaz, dovoljno je pokazati da je skup

$$H := \{g \in G \ : \exists n \in \mathbb{N} \text{ takav da je } g^n(C) \cap C \neq \emptyset\}$$

najviše prebrojiv. Kako bi smo to pokazali, primijetimo da je $g \in H$ ako i samo ako postoji trojka $(n, c, c') \in \mathbb{N} \times C \times C$ takva da je $g^n(c) = c'$. Drugim riječima, H je prebrojiva unija skupova oblika

$$H_{n,c,c'} := \{g \in G : \ g^n(c) = c'\} \quad (n \in \mathbb{N}, \ c, c' \in C).$$

Zbog toga je dovoljno dokazati da je svaki skup oblika $H_{n,c,c'}$ najviše prebrojiv. U tu svrhu fiksirajmo neki element $g \in H_{n,c,c'}$. Ako je h neki drugi element iz $H_{n,c,c'}$ onda je $g^n(c) = c' = h^n(c)$. Kako je G Abelova grupa, imamo

$$c = g^{-1}h^n(c) = (g^{-1}h)^n(c).$$

Budući da G djeluje slobodno na C mora biti

$$(g^{-1}h)^n = e \quad \iff \quad g^{-1}h \in \mathrm{Tor}(G) \quad \iff \quad h \in g\mathrm{Tor}(G).$$

Dakle, $H_{n,c,c'}$ je podskup od $g\mathrm{Tor}(G)$. Budući da je prema pretpostavci skup $\mathrm{Tor}(G)$ najviše prebrojiv, isto vrijedi i za $g\mathrm{Tor}(G)$. Posljedično je i $H_{n,c,c'}$, kao podskup od $g\mathrm{Tor}(G)$, najviše prebrojiv. Time je dokaz leme u potpunosti završen. $\square$

Teorem 30 (Banach-Tarski za $\mathbb{S}^2$)**.** *Jedinična sfera $\mathbb{S}^2$ u $\mathbb{R}^3$ je $SO(3)$-paradoksalna.*

Dokaz. Iz Hausdorffovog paradoksa (teorem 17) znamo da $\mathbb{S}^2$ sadrži prebrojiv podskup C takav da je $\mathbb{S}^2 \setminus C$ $SO(3)$-paradoksalan. Odaberimo pravac L kroz ishodište koji ne siječe C i označimo s G podgrupu od $SO(3)$ koja se sastoji od svih rotacija s osi L. Primijetimo da je G izomorfna grupi kružnice $\mathbb{T}$ i da G djeluje slobodno na C. Ako stavimo $X = E = \mathbb{S}^2$, tada su zadovoljene pretpostavke Apsorpcijske leme ($\mathrm{Tor}(G)$ je izomorfna s $\mathrm{Tor}(\mathbb{T})$ pa je kao takva prebrojiva prema primjeru 29). Dakle, $\mathbb{S}^2$ je G-ekvidekompozabilna (pa onda i $SO(3)$-ekvidekompozabilna) s $\mathbb{S}^2 \setminus C$. Korolar 26 nam garantira da $\mathbb{S}^2$ nasljeđuje $SO(3)$-paradoksalnost od $\mathbb{S}^2 \setminus C$. $\square$

Korolar 31. *Punktirana jedinična kugla $\mathbb{B}^3 \setminus \{0\}$ je $SO(3)$-paradoksalna.*

Dokaz. Prema Propoziciji 23, $SO(3)$-paradoksalnost od $\mathbb{S}^2$ je ekvivalentna egzistenciji dvočlane particije $\{A, B\}$ od $\mathbb{S}^2$ tako da vrijedi

$$A \sim \mathbb{S}^2 \sim B. \tag{6}$$

Stavimo

$$A^* := \bigcup_{a \in A} \{ra : \ 0 < r \leq 1\} \quad \text{i} \quad B^* := \bigcup_{b \in B} \{rb : \ 0 < r \leq 1\}.$$

Tada je $\{A^*, B^*\}$ particija od $\mathbb{B}^3 \setminus \{0\}$ i $A^* \sim \mathbb{B}^3 \setminus \{0\} \sim B^*$ preko istih rotacija odgovornih za (6). Dakle, $\mathbb{B}^3 \setminus \{0\}$ je $SO(3)$-paradoksalna. □

Zadatak 11. Dokažite da su oba skupa $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{B}^3$ i $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ $SO(3)$-paradoksalna.

Sljedeći zadatak nam na netrivijalan način pokazuje da Teorem transferencije (teorem 5) ne vrijedi ukoliko djelovanje grupe G nije slobodno.

Zadatak 12. Dokažite da jedinična kugla $\mathbb{B}^3$ nije $SO(3)$-paradoksalna.

Zadatak 12 nam također pokazuje da za uspostavljanje Banach-Tarskijevog paradoksa za $\mathbb{B}^3$ moramo uzeti striktnu nadgrupu grupe $SO(3)$. Kao što ćemo uskoro vidjeti, bit će nam dovoljno uzeti **grupu krutih gibanja** od $\mathbb{R}^3$ koja je po definiciji podgrupa grupe izometrija od $\mathbb{R}^3$ generirana svim rotacijama i translacijama. Tu grupu ćemo u daljnjem označavati s $\mathcal{G}$.

Teorem 32 (Banach-Tarski za $\mathbb{B}^3$)**.** *Trodimenzionalna jedinična kugla $\mathbb{B}^3$ je $\mathcal{G}$-paradoksalan podskup od $\mathbb{R}^3$.*

Dokaz. Neka je L pravac kroz točku $(0, 0, \frac{1}{2})$ koji je paralelan s osi x te neka je $\mathcal{G}_L$ podgrupa od $\mathcal{G}$ koja se sastoji od svih rotacija s osi L. Grupa $\mathcal{G}_L$ je izomorfna grupi kružnice $\mathbb{T}$ i trivijalno djeluje slobodno na jednočlanom skupu $\{0\}$, kojeg prevodi unutar $\mathbb{B}^3$. Ako stavimo $X = \mathbb{R}^3$, $E = \mathbb{B}^3$ i $C = \{0\}$, Apsorpcijska lema (lema 27) garantira da su skupovi $\mathbb{B}^3$ i $\mathbb{B}^3 \setminus \{0\}$ $\mathcal{G}_L$-ekvidekompozabilni, pa stoga i $\mathcal{G}$-ekvidekompozabilni (s $n = 2$). Pozivajući se na korolar 31 i korolar 26 zaključujemo da je $\mathbb{B}^3$ $\mathcal{G}$-paradoksalan podskup od $\mathbb{R}^3$. □

Zadatak 13. (a) Neka je $G \curvearrowright X$ djelovanje te E, F i H podskupovi od X. Ako je $E \sim_m F$ i $F \sim_n H$, dokažite da je $E \sim_{mn} H$.

(b) Dokažite da je $\mathbb{S}^2$ 8-paradoksalna s obzirom na grupu $SO(3)$.

(c) Dokažite da je $\mathbb{B}^3$ 16-paradoksalna s obzirom na grupu $\mathcal{G}$.

Napomena 33. Američki matematičar Raphael M. Robinson je 1947. godine dokazao da je jedinična kugla $\mathbb{B}^3$ 5-paradoksalna s obzirom na grupu $\mathcal{G}$ te da je $n = 5$ najmanji mogući takav broj.

Napomena 34. Jaka forma Banach-Tarskijevog paradoksa kaže da su svaka dva ograničena podskupa od $\mathbb{R}^3$ s nepraznim interiorom $\mathcal{G}$-ekvidekompozabilna.

7 Domaća zadaća

- Za *6. domaću zadaću* potrebno je riješiti barem 5 od navedenih 7 zadataka iz 2. i 3. točke. Rok predaje zadaće je petak 13. 5. 2022.

- Za *7. domaću zadaću* potrebno je riješiti barem 4 od navedenih 6 zadataka iz 4., 5. i 6. točke. Rok predaje zadaće je petak 20. 5. 2022.