RJEŠENJA–BODOVANJE: Algebarske strukture – drugi test (19. 01. 2024.)

!!! Niže dana rješenja zadataka su napisana na način kako bi uvijek trebalo rješavati zadatke na testovima, kolokvijima i pisanim ispitima. Posebno treba voditi računa da napisana argumentacija bude precizna, jasna i nedvosmislena. Isto tako treba korektno koristiti matematičku notaciju. I treba pisati čitko; jer nečitko napisana argumentacija uvijek ide na štetu studenta.

1. *Neka je S skup svih matrica $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ iz prstena $M_2(\mathbb{Z})$, svih 2×2 cjelobrojnih matrica, takvih da je $a + c$ jednako $b + d$. Je li S, uz standardne operacije zbrajanja i množenja matrica, prsten s jedinicom?*

   Rješenje. **(0.5 boda)** Neka su

$$M_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \in S, \quad \text{gdje je } i = 1, 2,$$

   dvije proizvoljne matrice iz S. Prema definiciji skupa S, njihovi elementi zadovoljavaju

$$a_1 + c_1 = b_1 + d_1 \quad \text{i} \quad a_2 + c_2 = b_2 + d_2. \tag{1}$$

   Dokažimo prvo da je S podgrupa od $M_2(\mathbb{Z})$. Dovoljno je provjeriti da se razlika

$$M_1 - M_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - a_2 & b_1 - b_2 \\ c_1 - c_2 & d_1 - d_2 \end{pmatrix}$$

   nalazi u S. Drugim riječima, dovoljno je provjeriti da elementi od $M_1 - M_2$ zadovoljavaju

$$(a_1 - a_2) + (c_1 - c_2) = (b_1 - b_2) + (d_1 - d_2).$$

   Međutim, gornja jednakost vrijedi jer se može dobiti kao razlika prve i druge jednakosti u (1). Odavde zaključujemo da je S podgrupa, jasno komutativna, od $M_2(\mathbb{Z})$.

   (1 bod) Dokažimo da je S potprsten od $M_2(\mathbb{Z})$. Dovoljno je provjeriti da se produkt

$$M_1 \cdot M_2 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$$

   nalazi u S. Drugim riječima, dovoljno je provjeriti da elementi od $M_1 \cdot M_2$ zadovoljavaju

$$(a_1a_2 + b_1c_2) + (c_1a_2 + d_1c_2) = (a_1b_2 + b_1d_2) + (c_1b_2 + d_1d_2).$$

   Ova jednakost može se zapisati kao

$$(a_1 + c_1)a_2 + (b_1 + d_1)c_2 = (a_1 + c_1)b_2 + (b_1 + d_1)d_2.$$

   Kako je, prema prvoj jednakosti u (1), $b_1 + d_1 = a_1 + c_1$, gornja jednakost ekvivalentna je

$$(a_1 + c_1)a_2 + (a_1 + c_1)c_2 = (a_1 + c_1)b_2 + (a_1 + c_1)d_2,$$

   tj.

$$(a_1 + c_1)(a_2 + c_2) = (a_1 + c_1)(b_2 + d_2).$$

   Sada iz druge jednakosti u (1) vidimo da posljednja jednakost vrijedi, odakle zaključujemo da je S potprsten od $M_2(\mathbb{Z})$.

   Napokon, kako se jedinična matrica $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ nalazi u S, slijedi da je S, uz standardne operacije zbrajanja i množenja matrica, prsten s jedinicom.

2. *Neka je H skup svih polinoma $f \in \mathbb{Z}[X]$ koji su djeljivi polinomom X^2+5 te se poništavaju u realnom broju $(\sqrt{2}-1)/3$. Je li H nenul ideal u prstenu $\mathbb{Z}[X]$?*

Rješenje. **(0.5 boda)** Neka su $f, g \in \mathbb{Z}[X]$ proizvoljni polinomi iz H. Tada, prema definiciji skupa H, postoje polinomi $p, q \in \mathbb{Z}[X]$ takvi da je

$$f = (X^2+5)\cdot p \quad \text{i} \quad g = (X^2+5)\cdot q \tag{2}$$

te se f i g poništavaju u realnom broju $(\sqrt{2}-1)/3$.

Dokažimo prvo da je H podgrupa od $\mathbb{Z}[X]$. Dovoljno je provjeriti da se razlika $f-g$ nalazi u H. Drugim riječima, dovoljno je provjeriti da je polinom $f-g$ djeljiv polinomom X^2+5 te se poništava u realnom broju $(\sqrt{2}-1)/3$. Oduzimanjem jednakosti u (2) dobivamo

$$f-g = (X^2+5)\cdot(p-q),$$

odakle vidimo da je polinom $f-g$ djeljiv polinomom X^2+5. Nadalje, kako se polinomi f i g poništavaju u realnom broju $(\sqrt{2}-1)/3$, očito to vrijedi i za njihovu razliku $f-g$. Odavde zaključujemo da je H podgrupa, jasno komutativna, od $\mathbb{Z}[X]$.

(0.5 boda) Dokažimo da je H ideal u prstenu $\mathbb{Z}[X]$. Neka je h proizvoljan polinom iz $\mathbb{Z}[X]$. Tada, prema prvoj jednakosti u (2), za produkt $f\cdot h = h\cdot f$ vrijedi

$$f\cdot h = h\cdot f = (X^2+5)\cdot p\cdot h = (X^2+5)\cdot(p\cdot h),$$

odakle vidimo da je $f\cdot h = h\cdot f$ djeljiv s (X^2+5). Nadalje, kako se f poništava u realnom broju $(\sqrt{2}-1)/3$, imamo

$$(f\cdot h)\left(\tfrac{\sqrt{2}-1}{3}\right) = (h\cdot f)\left(\tfrac{\sqrt{2}-1}{3}\right) = h\left(\tfrac{\sqrt{2}-1}{3}\right)\cdot f\left(\tfrac{\sqrt{2}-1}{3}\right) = h\left(\tfrac{\sqrt{2}-1}{3}\right)\cdot 0 = 0.$$

Dakle, polinom $f\cdot h = h\cdot f$ se poništava u realnom broju $(\sqrt{2}-1)/3$. Iz dokazanog zaključujemo da je H (obostrani) ideal u prstenu $\mathbb{Z}[X]$.

(0.5 boda) Preostaje nam provjeriti je li H nenul ideal. Ako stavimo $X = (\sqrt{2}-1)/3$, onda je $3X+1=\sqrt{2}$ te nakon kvadriranja $9X^2+6X+1=2$; tj.,

$$r(X) = 9X^2+6X-1 \in \mathbb{Z}[X]$$

se poništava u realnom broju $(\sqrt{2}-1)/3$. Stoga se nenul polinom $t \in \mathbb{Z}[X]$ zadan s

$$t(X) = (X^2+5)\cdot r(X) = (X^2+5)\cdot\big(9X^2+6X-1\big)$$

poništava u realnom broju $(\sqrt{2}-1)/3$ te je djeljiv polinomom X^2+5. Kako se nenul polinom t nalazi u H, slijedi da je H nenul ideal.

3. *Neka je $T_2(\mathbb{C})$ prsten gornje trokutastih 2×2 kompleksnih matrica. Definirajmo preslikavanje f iz prstena $\mathbb{C}\times\mathbb{Z}[X]$ u $T_2(\mathbb{C})$ s*

$$f(z,p(X)) := \begin{pmatrix} z & 2p(\sqrt{3}-1)-2z \\ 0 & p(\sqrt{3}-1) \end{pmatrix}.$$

Je li f homomorfizam prstena s jedinicom? Ako da, utvrdite je li f monomorfizam i je li epimorfizam.

Rješenje. **(0.5 boda)** Neka su $a=(z,p)$ i $b=(w,q)$ proizvoljni elementi prstena $\mathbb{C}\times\mathbb{Z}[X]$.

Dokažimo prvo da je dano preslikavanje f homomorfizam pripadnih komutativnih grupa. Dovoljno je provjeriti da je $f(a+b)=f(a)+f(b)$. Lijeva strana jednakosti jednaka je

$$\begin{aligned} f(a+b) =& f\left((z,p)+(w,q)\right) = f\left(z+w,p+q\right)\\ =& \begin{pmatrix} z+w & 2(p+q)(\sqrt{3}-1)-2(z+w) \\ 0 & (p+q)(\sqrt{3}-1) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3}$$

Desna strana je jednaka

$$\begin{aligned} f(a)+f(b) =& f(z,p)+f(w,q) = \begin{pmatrix} z & 2p(\sqrt{3}-1)-2z \\ 0 & p(\sqrt{3}-1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w & 2q(\sqrt{3}-1)-2w \\ 0 & q(\sqrt{3}-1) \end{pmatrix}\\ =& \begin{pmatrix} z+w & 2p(\sqrt{3}-1)-2z+2q(\sqrt{3}-1)-2w \\ 0 & p(\sqrt{3}-1)+q(\sqrt{3}-1) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{4}$$

Kako su matrice u (3) i (4) očito jednake, zaključujemo da je f homomorfizam grupa.

(0.5 boda) Da bismo dokazali da je f homomorfizam prstena, dovoljno je provjeriti da vrijedi $f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b)$. Lijeva strana jednakosti jednaka je

$$\begin{aligned} f(a\cdot b) =& f\left((z,p)\cdot(w,q)\right) = f\left(z\cdot w,p\cdot q\right)\\ =& \begin{pmatrix} z\cdot w & 2(p\cdot q)(\sqrt{3}-1)-2(z\cdot w) \\ 0 & (p\cdot q)(\sqrt{3}-1) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5}$$

Desna strana je jednaka

$$\begin{aligned} f(a)\cdot f(b) =& f(z,p)\cdot f(w,q) = \begin{pmatrix} z & 2p(\sqrt{3}-1)-2z \\ 0 & p(\sqrt{3}-1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w & 2q(\sqrt{3}-1)-2w \\ 0 & q(\sqrt{3}-1) \end{pmatrix}\\ =& \begin{pmatrix} z\cdot w & z\cdot\left(2q(\sqrt{3}-1)-2w\right)+\left(2p(\sqrt{3}-1)-2z\right)\cdot q(\sqrt{3}-1) \\ 0 & p(\sqrt{3}-1)\cdot q(\sqrt{3}-1) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{6}$$

Matrični elementi na mjestima $(1,1)$, $(2,1)$ i $(2,2)$ u (5) i (6) se očito podudaraju. Nadalje, matrični element na mjestu $(1,2)$ u (6) jednak je

$$\begin{aligned} & z\cdot\left(2q(\sqrt{3}-1)-2w\right)+\left(2p(\sqrt{3}-1)-2z\right)\cdot q(\sqrt{3}-1)\\ =& z\cdot 2q(\sqrt{3}-1)-z\cdot 2w+2p(\sqrt{3}-1)\cdot q(\sqrt{3}-1)-2z\cdot q(\sqrt{3}-1)\\ =& -z\cdot 2w+2p(\sqrt{3}-1)\cdot q(\sqrt{3}-1) = 2(p\cdot q)(\sqrt{3}-1)-2(z\cdot w), \end{aligned}$$

odakle vidimo da su i matrični elementi na mjestima $(1,2)$ u (5) i (6) jednaki. Dakle, f je homomorfizam prstena.

Kako je $1_{\mathbb{C}\times\mathbb{Z}[X]} = (1,1)$ te vrijedi

$$f(1_{\mathbb{C}\times\mathbb{Z}[X]}) = f(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1_{T_2(\mathbb{C})},$$

slijedi da je f homomorfizam prstena s jedinicom.

(0.5 boda) Preslikavanje f nije monomorfizam. Zaista, neka je $p \in \mathbb{Z}[X]$ polinom zadan s

$$p(X) = (X+1)^2 - 3 = X^2 + 2X - 2.$$

Očito je $p(\sqrt{3}-1) = 0$ pa je stoga $f(0,p)$ nulmatrica. Dakle, nenul element $(0,p) \in \mathbb{C}\times\mathbb{Z}[X]$ nalazi se u jezgri od f pa to preslikavanje ne može biti monomorfizam.

(0.5 boda) Preslikavanje f nije epimorfizam jer se, npr. matrica $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in T_2(\mathbb{C})$ ne nalazi njegovoj slici. Zaista, kad bismo imali

$$f(z,p(X)) = \begin{pmatrix} z & 2p(\sqrt{3}-1) - 2z \\ 0 & p(\sqrt{3}-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{za neki } (z,p(X)) \in \mathbb{C}\times\mathbb{Z}[X],$$

izjednačavanjem matričnih elemenata dobili bismo

$$z = 0, \quad 2p(\sqrt{3}-1) - 2z = 1, \quad p(\sqrt{3}-1) = 1.$$

Iz prve dvije jednakosti slijedi $p(\sqrt{3}-1) = 1/2$, što je u kontradikciji s trećom jednakošću.