Linearna algebra 2

7. zadaća

1. Neka je $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ ortonormirana baza prostora $V^2(O)$. Zadani su sljedeći operatori iz prostora $L\left(V^2(O)\right)$: Z je zrcaljenje s obzirom na os x, P ortogonalna projekcija na os y, a R rotacija oko ishodišta za kut od 60 stupnjeva.

   (a) Može li se svaki operator $A \in L\left(V^2(O)\right)$ prikazati kao linearna kombinacija operatora Z, P i R ? Obrazložite bez izračunavanja takvog prikaza.

   (b) Ako je odgovor u (a) negativan, može li se odabrati još neki operator S kao rotacija oko ishodišta, tako da svaki $A \in L\left(V^2(O)\right)$ ima prikaz pomoću Z, P, R i S ?

2. Ispitajte koja su od sljedećih preslikavanja linearni funkcionali te ona koja jesu prikažite kao linearnu kombinaciju elemenata baze dualne kanonskoj bazi pripadnog prostora:

   a) $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, a(x, y) = (2x, x - y)$

   b) $b : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, b(x, y, z) = x + 3y - 2z,$

   c) $c : \mathcal{P}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, c(p) = p'(1),$

   d) $d : \mathcal{P}_3(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, d(p) = 2p(i)$

   e) $e : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, e(X) = \det X,$

   f) $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, f(X) = \operatorname{tr} X.$

3. U prostoru $M_2(\mathbb{R})$ su zadane matrice

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Dokažite da te matrice čine bazu za $M_2(\mathbb{R})$ i nađite toj bazi dualnu bazu $\{A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_4^*\}$, tj. odredite djelovanje elemenata te dualne baze na proizvoljnoj matrici $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

4. U prostoru $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ zadani su polinomi

$$p_1(t) = 2t^2 - 1, \quad p_2(t) = t + t^2, \quad p_3(t) = 1 + 3t + 2t^2.$$

   Dokažite da ti polinomi čine bazu za $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ i nađite toj bazi dualnu bazu $\{p_1^*, p_2^*, p_3^*\}$, tj. odredite djelovanje elemenata te dualne baze na proizvoljnom polinomu $a+ bt + ct^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Prikažite linearni funkcional $f(p) = \int_{-1}^{1} p(2t - 1) dt$ kao linearnu kombinaciju elemenata dualne baze.

5. Neka je $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ linearan operator koji u bazi $(e') = \{e_1', e_2', e_3', e_4'\}$ ima matrični zapis

$$A(e') = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

pri čemu je $e_1' = (2,0,1,-1), e_2' = (0,0,2,-3), e_3' = (1,2,-1,0), e_4' = (2,1,1,-2)$.

a) Za $x(e) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T$ odredite $x(e')$ i $(Ax)(e)$.

b) Za $y(e') = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}^T$ odredite $y(e)$ i $(Ay)(e)$.

6. Zadan je linearan operator $B : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ s

$$A\left(at^2 + bt + c\right) = (a-c)t^3 + bt^2 - 3ct + 2a + b.$$

Odredite matrični zapis operatora B u paru baza $\left\{1, 1-t^2, t+t^2\right\}$ za $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ i $\left\{1+t+t^2, 2t, 1+t^3, -1-t\right\}$ za $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Postoji li par baza u kojem B ima matrični prikaz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$?

7. Zadan je linearan operator $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 4$ i pripadnim svojstvenim potprostorima $V_{\lambda_1}(A) = [\{(1,2)\}]$ i $V_{\lambda_2}(A) = [\{(0,1)\}]$. Odredite djelovanje operatora A na opći vektor $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, tako da ga najprije zapišete u takvoj bazi da matrica bude dijagonalna, a zatim iskoristite matrice prijelaza.

8. Prikažite sljedeće operatora iz $L\left(V^3(O)\right)$ u takvoj bazi da matrica bude dijagonalna, a zatim odredite djelovanje na opći vektor iz $V^3(O)$ pomoću matrica prijelaza.

a) ortogonalna projekcija na pravac s vektorom smjera $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$,

b) zrcaljenje s obzirom na ravninu razapetu vektorima $\vec{i}$ i $\vec{j} - \vec{k}$.

9. Za sljedeće matrice A odredite matricu P takvu da je $A = PDP^{-1}$, gdje je D dijagonalna matrica (ako je to moguće):

a) $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$, $b)$ $\begin{bmatrix} 1 & -5 & 8 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

10. Pokažite da vrijedi $\left(PDP^{-1}\right)^n = PD^nP^{-1}$. Koristeći tu tvrdnju odredite A^n za one matrice iz prethodnog zadatka za koje postoji tražena matrica P.