4. zadaća, rješenja zadataka 6-9

ZADATAK 0.1. Neka je $A : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ linearni operator takav da je

$$A\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix},\ A\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Odredite $A\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right)$ i $A\left(\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\right)$. Za koje matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ možemo iz zadanih podataka odrediti $A\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$.

RJEŠENJE Uočimo da je

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 2 \cdot \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

pa je

$$A\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right) = 2A\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) - 2A\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nadalje, vrijedi

$$\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

pa je

$$A\left(\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\right) = 2A\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) + 3A\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 8 \\ 13 & 20 \end{bmatrix}.$$

Uočimo da za sve matrice oblika $\lambda\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \mu\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ (isključivo za takve matrice) možemo odrediti njihovu sliku iz zadanih podataka. Vrijedi

$$A\left(\lambda\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \mu\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \lambda A\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) + \mu A\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \lambda\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \mu\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda + 3\mu & 2\lambda + \mu \\ 3\lambda + 2\mu & 4\lambda + 4\mu \end{bmatrix}.$$

$\square$

ZADATAK 0.2. Postoji li linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ takav da vrijedi:

(a) $A(1, 2, 3) = (1, 1)$ i $A(2, 4, 6) = (2, 3)$?

(b) $A(1, 0, 0) = (1, 1)$ i $A(2, 0, 0) = (2, 2)$?

(c) $A(1, 0, 1) = (2, 1)$, $A(1, 1, 0) = (1, 2)$, $A(0, 1, -1) = (0, 1)$.

RJEŠENJE

(a) Ukoliko bi takav linearan operator postojao, vrijedilo bi

$$A(2, 4, 6) = A(2(1, 2, 3)) = 2A(1, 2, 3) = 2(1, 1) = (2, 2).$$

Kako je u zadatku zadano da je $A(2, 4, 6) = (2, 3)$ zaključujemo da takav linearan operator A ne postoji.

(b) Uočimo da je $(2,0,0) = 2(1,0,0)$ i da je u ovom podzadatku $A(2,0,0) = 2A(1,0,0)$ pa nemamo problem kao u (a) dijelu zadatka. Primjer linearnog operatora koji zadovoljava uvjet zadatka je

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1).$$

Za zadaću dokažite da je ovako definirana funkcija zaista linearni operator. Uočite da postoje i drugi linearni operatori koji zadovoljavaju uvjete zadatka, npr.

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2).$$

Pokušajte smisliti još neki primjer linearnog operatora koji zadovoljava uvjete zadatka.

(c) Uočimo da vrijedi $(1,0,1)+(0,1,-1) = (1,1,0)$. Ako postoji linearni operator koji zadovoljava uvjete zadatka, onda mora vrijediti

$$A(1,0,1) + A(0,1,-1) = A(1,1,0),$$

tj. $(2,1) + (0,1) = (1,2)$. Budući da smo došli do kontradikcije, zaključujemo da ne postoji linearni operator koji zadovoljava uvjete zadatka.

Zadatak 0.3. Neka je $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ linearni operator takav da je

$$A(1,1,1) = (2,3),\ A(1,0,1) = (1,1),\ A(0,1,1) = (0,0).$$

Možemo li iz zadanih podataka potpuno odrediti linearni operator A, tj. odrediti $A(x_1, x_2, x_3)$ za proizvoljni vektor $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$?

Rješenje Uočimo da je skup $\{(1,1,1), (1,0,1), (0,1,1)\}$ baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$. Za $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ vrijedi

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3)(1,1,1) + (x_3 - x_2)(1,0,1) + (x_3 - x_1)(0,1,1)$$

pa je

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + x_2 - x_3)A(1,1,1) + (x_3 - x_2)A(1,0,1) + (x_3 - x_1)A(0,1,1) \\ &= (x_1 + x_2 - x_3)(2,3) + (x_3 - x_2)(1,1) + (x_3 - x_1)(0,0) \\ &= (2x_1 + x_2 - x_3, 3x_1 + 2x_2 - 2x_3). \end{aligned}$$

Zadatak 0.4. Neka je $\{e_1, e_2\}$ kanonska baza za $\mathbb{R}^2$, $f_1 = (1,1)$, $f_2 = (1,2)$. Neka su $A, B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearni operatori takvi da je

$$\begin{aligned} Ae_1 = (1,-1),\ Ae_2 = (1,0) \\ Bf_1 = (2,-1),\ Bf_2 = (3,-1). \end{aligned}$$

Obrazložite zašto su ovim podacima linearni operatori A i B jedinstveno određeni. Odredite Af_1, Af_2. Što možete zaključiti o operatorima A i B?

Rješenje Linearni operatori A i B su jedinstveno određeni jer su $\{e_1, e_2\}$ i $\{f_1, f_2\}$ baze vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$. Za proizvoljni vektor $v \in \mathbb{R}^2$ postoje jedinstveni skalari $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$v = \alpha e_1 + \beta e_2,\ v = \gamma f_1 + \delta f_2.$$

Tada je

$$Av = \alpha Ae_1 + \beta Ae_2 = (\alpha + \beta, -\alpha),\ Bv = \gamma Bf_1 + \delta Bf_2 = (2\gamma + 3\delta, -\gamma - \delta).$$

Vrijedi $Af_1 = A(e_1 + e_2) = Ae_1 + Ae_2 = (2,-1)$, $Af_2 = A(e_1 + 2e_2) = Ae_1 + 2Ae_2 = (3,-1)$. Vidimo da je $Af_1 = Bf_1$ i $Af_2 = Bf_2$, odnosno linearni operatori A i B se podudaraju na bazi. Kako je svaki linearni operator jedinstveno zadan svojim djelovanjem na bazi, zaključujemo da je $A = B$.