MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

Prvi ispitni rok - 31. siječnja 2024.

ZADATAK 1

(a) (5 bodova) Neka je $A \in M_3(\mathbb{R})$ proizvoljna matrica. Dokažite da je skup svih donjetrokutastih matrica $X \in M_3(\mathbb{R})$ sa svojstvom $\operatorname{tr}(XA) = 0$ potprostor od $M_3(\mathbb{R})$.

(b) (10 bodova) Odredite bazu i dimenziju tog prostora za

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(c) (10 bodova) Odredite bazu za sumu i bazu za presjek prostora iz (b) i prostora svih simetričnih matrica reda 3.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

Prvi ispitni rok - 31. siječnja 2024.

ZADATAK 2

(a) (14 bodova) Neka je

$$S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0,\ x_3^2 + x_4^2 = 1\}.$$

Pokažite da S nije potprostor od $\mathbb{R}^4$. Zatim, pokažite da je $\dim[S] = 3$ i odredite jedan direktni komplement od $[S]$ u $\mathbb{R}^4$.

(b) (6 bodova) Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor te $M \leq V$, $M \neq \{0_V\}, V$. Dokažite da je $V \setminus M$ sustav izvodnica za V.

Rješenje:

(a) Kako je

$$S \subseteq M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = 0\} \leq \mathbb{R}^4,$$

slijedi da je $\dim[S] \leq \dim M = 3$. S druge strane, lako utvrdimo da su

$$(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, -1, 1, 0) \in S,$$

pa kako su oni linearno nezavisni, slijedi $\dim[S] = 3$. Direktni komplement sad dobijemo isprobavanjem kanonskih vektora, gdje je već $(1, 0, 0, 0)$ dobar odabir, pa je jedan direktni komplemenet dan s $[\{e_1\}]$.

(b) Na vježbama je pokazano kako za M iz zadatka postoji baza B za V takva da je $M \cap B = \emptyset$. Tada je $B \subseteq V \setminus M$, pa je $V \setminus M$ kao nadskup sustava izvodnica i sam takav.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

Prvi ispitni rok - 31. siječnja 2024.

ZADATAK 3

(a) (10 bodova) Odredite λ tako da matrica A ima determinantu -1, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(b) (10 bodova) Za $\lambda = \frac{1}{2}$, koristeći elementarne transformacije nad retcima matrice A, odredite inverz od A.

Rješenje

a)

$$-1 = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (\text{Laplace 3. red})$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\text{Laplace 1. red}) = \lambda \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -\lambda.$$

Dakle $\lambda = 1$.

b)

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

Prvi ispitni rok - 31. siječnja 2024.

ZADATAK 4

(a) (10 bodova) Riješite sustav

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad - \ x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - \ x_4 = 9 \\ \qquad x_2 + \ x_3 - \ x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - \ x_4 = 5 \end{cases}$$

(b) (7 bodova) Ako je A matrica sustava iz (a) dijela zadatka, riješite sustav $\tilde{A}X = 0$, gdje je $\tilde{A}$ adjunkta matrice A.

(c) (8 bodova) Dan je nehomogeni sustav $A'X = B$ od četiri linearne jednadžbe s četiri nepoznanice takav da je $r(A') = 2$. Ako su $(1,0,1,-1), (0,1,1,0)$ i $(-1,1,1,0)$ tri rješenja tog sustava, odredite sva njegova rješenja.

Rješenje:

(a) Rješenje sustava je dano s

$$C_0 + \Omega_A = (1,1,1,1) + [\{(1,-1,1,0),(1,0,-1,-1)\}].$$

(b) Iz (a) dijela zadatka slijedi da je $r(A) = 2 \leq 4-2$. Na vježbama je pokazano da je tada $\tilde{A} = 0$. Stoga je rješenje sustava $\tilde{A}X = 0$ cijeli $\mathbb{R}^4$ (ili cijeli M_{41}).

(c) Kako je $r(A') = 2$, slijedi da je $\dim \Omega_{A'} = 2$. Već nam je poznato (barem) jedno partikularno rješenje, pa nam je za opis cijelog skupa rješenja potrebno još pronaći dva linearno nezavisna rješenja sustava $A'X = 0$. Označimo redom

$$X_1 = (1,0,1,-1), \quad X_2 = (0,1,1,0), \quad X_3 = (-1,1,1,0).$$

Tada zbog $A'X_1 = A'X_2 = A'X_3 = B$ slijedi

$$A'(X_1 - X_2) = A'(X_2 - X_3) = 0,$$

pa vidimo da su $(1,-1,0,-1)$ i $(1,0,0,0)$ dva linearno nezavisna rješenja homogenog sustava. Stoga je skup rješenja sustava $A'X = B$ dan s

$$(1,0,1,-1) + [\{(1,-1,0,-1),(1,0,0,0)\}].$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

Prvi ispitni rok - 31. siječnja 2024.

ZADATAK 5

(10 bodova) Neka je $A \in M_n$, $n \geq 2$, regularna matrica za koju vrijedi $r(A) = \det A$. Odredite $\det A^{-1}$ i $\det \tilde{A}$.