LINEARNA ALGEBRA 1

Prvi kolokvij - 23. studenog 2023.

ZADATAK 1

(a) (5 bodova) Reducirajte do maksimalnog linearno nezavisnog skupa u $V^3(O)$ skup

$$\{\vec{j}+\vec{k}, \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}, \vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}, \vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}\}.$$

(b) (5 bodova) Za koje vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$ vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3(O)$ zadani s

$$\vec{a} = \vec{i}+2\vec{j}+(\lambda-1)\vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{i}+2\vec{j}, \quad \vec{c} = \vec{i}+2\vec{j}+\vec{k},$$

zadovoljavaju jednakost

$$[\{\vec{c}, \vec{a}\}] = [\{\vec{a}, \vec{b}\}].$$

Rješenje.

a)

$$\begin{aligned}
(\vec{j}+\vec{k}) &\neq \vec{0} \\
\vec{i}+\vec{j}+\vec{k} &\neq \lambda(\vec{j}+\vec{k}) \\
\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k} &= (\vec{j}+\vec{k}) + (\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}) \\
\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k} &= (\vec{j}+\vec{k}) + 2(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}).
\end{aligned}$$

Jedan maksimalan nezavisan podskup je $\{\vec{j}+\vec{k}, \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\}$.

b) Iz $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ imamo

$$\begin{aligned}
\alpha+\beta &= 1 & \qquad\qquad \alpha+\beta &= 1 \\
2\alpha+2\beta &= 2 & 0 &= 0 \\
(\lambda-1)\alpha+0\beta &= 1 & (\lambda-1)\alpha &= 1
\end{aligned}$$

Da bi sustav bio rješiv, nužno je i dovoljno $\lambda \neq 1$.
Iz $\vec{b} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{c}$ imamo

$$\begin{aligned}
\alpha+\beta &= 1 & \qquad\qquad \alpha+\beta &= 1 \\
2\alpha+2\beta &= 2 & 0 &= 0 \\
(\lambda-1)\alpha+\beta &= 0 & (2-\lambda)\beta &= 1-\lambda
\end{aligned}$$

Da bi sustav bio rješiv, nužno je i dovoljno $\lambda \neq 2$.

Oba sustava daju $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

LINEARNA ALGEBRA 1

Prvi kolokvij - 23. studenog 2023.

ZADATAK 2

(10 bodova) Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^n$ sa standardnim operacijama zadani su sljedeći skupovi

$$S_1 = \Big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_k = \frac{x_{k-1} + x_{k+1}}{2}, \quad \text{za sve } k = 2, \ldots, n-1\Big\},$$
$$S_2 = \Big\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_k^2 = x_{k-1}x_{k+1}, \quad \text{za sve } k = 2, \ldots, n-1\Big\}.$$

(a) Odredite jesu li S_1 i S_2 potprostori od $\mathbb{R}^n$.

(b) Postoji li $M \leq \mathbb{R}^n$ dimenzije 2 takav da vrijedi $M = [S_1]$? Ako postoji, pronađite jednu odgovarajuću bazu, u suprotnom pokažite da takav ne postoji.

(c) Postoji li $L \leq \mathbb{R}^n$ dimenzije 2 takav da vrijedi $L = [S_2]$? Ako postoji, pronađite jednu odgovarajuću bazu, u suprotnom pokažite da takav ne postoji.

Rješenje: Pokažimo prvo da je $S_1 \leq \mathbb{R}^n$. Neka su $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in S_1$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tada uvjet

$$x_k = \frac{x_{k-1} + x_{k+1}}{2}, \quad 2 \leq k \leq n-1,$$

možemo ekvivalentno zapisati kao

$$x_{k+1} - x_k = x_k - x_{k-1}, \quad 2 \leq k \leq n-1.$$

Sada lako vidimo da za linearnu kombinaciju $\alpha x + \beta y$ i svaki $2 \leq k \leq n-1$ vrijedi

$$\begin{aligned}
(\alpha x_{k+1} + \beta y_{k+1}) - (\alpha x_k + \beta y_k) &= \alpha(x_{k+1} - x_k) + \beta(y_{k+1} - y_k) \\
&= \alpha(x_k - x_{k-1}) + \beta(y_k - y_{k-1}) \\
&= (\alpha x_k + \beta y_k) - (\alpha x_{k-1} + \beta y_{k-1}),
\end{aligned}$$

pa je zaista $S_1 \leq \mathbb{R}^n$. Posebno, vrijedi $[S_1] = S_1$. Dakle, traženi M će postojati (i to će biti upravo S_1) ako i samo ako je $\dim S_1 = 2$. Ako označimo

$$d := x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \cdots = x_n - x_{n-1},$$

tada vidimo da je

$$\begin{aligned}
x \in M \iff x &= (x_1, x_1 + d, x_1 + 2d, \ldots, x_1 + (n-1)d) \\
&= x_1(1, 1, 1, \ldots, 1) + d(0, 1, 2, \ldots, n-1),
\end{aligned}$$

pa vidimo da je zaista $\dim S_1 = 2$ te je jedna baza dana s

$$\left\{ \sum_{i=1}^{n} e_i, \sum_{i=1}^{n} (i-1)e_i. \right\}.$$

Pokažimo sada $S_2 \not\leq \mathbb{R}^n$. Očito vrijedi $e_1 \in S_2$ te $\sum_{i=1}^n e_i \in S_2$, ali njihov zbroj više nije element iz S_2 (prva i treća koordinata pomnožene više ne daju kvadrat druge). Dodatno, primijetimo kako imamo i

$$\left\{e_1, e_n, \sum_{i=1}^n e_i\right\} \subseteq S_2.$$

Kako su ova tri vektora očito linearno nezavisna (pretpostavka $n \geq 3$), slijedi da je

$$\dim[S_2] \geq \dim\left[\left\{e_1, e_n, \sum_{i=1}^n e_i\right\}\right] = 3,$$

pa traženi L ne može postojati.

LINEARNA ALGEBRA 1

Prvi kolokvij - 23. studenog 2023.

ZADATAK 3

(10 bodova) U vektorskom prostoru $M_2(\mathbb{R})$ zadani su potprostori

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a + b - c = 0, -a + 2b + d = 0 \right\},$$
$$Y = \left\{ A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \ : \ A = A^T, \ a = 2c + d \right\}.$$

Odredite po jednu bazu potprostora $X + Y$ i $X \cap Y$.

Rješenje: Neka je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in X \cap Y$. Zbog $A \in Y$ imamo $b = c$, $a = 2c + d$, a zbog $A \in X$ vrijedi i $a + b - c = 0$, $-a + 2b + d = 0$. Iz navedenih uvjeta slijedi $a = 0$, $d = -2b$, pa vidimo da je

$$A = \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & -2b \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Dakle jedna baza za $X \cap Y$ je $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \right\}$.

Za bazu sume odredimo prvo baze za X i Y. Imamo da je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in X$ ako i samo ako

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ a + b & a - 2b \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Označimo

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Skup $\{a_1, a_2\}$ je sustav izvodnica za X i linearno je nezavisan, dakle to je baza za X.

Nadalje, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in Y$ ako i samo ako

$$A = \begin{bmatrix} 2b + d & b \\ b & d \end{bmatrix} = b \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Označimo

$$b_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dakle baza za Y je $\{b_1, b_2, b_3\}$.

Kako znamo dimenzije od X, Y i $X \cap Y$, možemo odrediti dimenziju od $X + Y$:

$$\dim(X + Y) = \dim X + \dim Y - \dim(X \cap Y) = 2 + 2 - 1 = 3$$

Skup $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ je sustav izvodnica za $X + Y$, pa ga možemo reducirati do baze za $X + Y$. Budući da je $\dim(X + Y) = 3$, trebamo izbaciti jedan vektor da bi dobili bazu. Pokaže se da je $\{a_1, a_2, b_1\}$ linearno nezavisan, dakle to je baza za $X + Y$.

LINEARNA ALGEBRA 1

Prvi kolokvij - 23. studenog 2023.

ZADATAK 4

(10 bodova) U vektorskom prostoru $\mathcal{P}_3$ polinoma s realnim koeficijentima stupnja manjeg ili jednakog tri dan je potprostor

$$M = \{p \in \mathcal{P}_3 \ : \ p(1) = p(-1), \ p(2) = 0\}.$$

(a) Odredite jedan direktan komplement od M u $\mathcal{P}_3$.

(b) Ako je N dobiveni direktan komplement, odredite rastav polinoma $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ s obzirom na rastav $\mathcal{P}_3 = M \dot{+} N$.

Rješenje:

(a) Odredimo prvo jednu bazu za M. Za $p \in M$ imamo prvo zbog uvjeta $p(2) = 0$ da p mora biti oblika

$$p(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c),$$

za neke $a, b, c \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem drugog uvjeta $p(1) = p(-1)$ slijedi

$$-(a+b+c) = -3(a-b+c),$$

odakle pak dobivamo

$$a - 2b + c = 0.$$

Stoga je

$$p \in M \iff p(x) = (x-2)((2b-c)x^2 + bx + c) = b(x-2)(x+2x^2) + c(x-2)(1-x^2).$$

Dakle, skup

$$\{x^3 - 2x^2 - x + 2, 2x^3 - 3x^2 - 2x\}$$

je sustav izvodnica za M, a kako je on očito i linearno nezavisan, to je jedna baza za M. Sada nam je potrebna jedna dopuna do baze za cijeli $\mathcal{P}_3$. Može se lako provjeriti da je jedna dobra dopuna dana s polinomima $\{1, x\}$, pa zaključujemo da je jedan direktni komplement od M u $\mathcal{P}_3$ dan s

$$N = [\{1, t\}].$$

(b) Za traženi rastav potrebno je odrediti zapis polinoma $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ u bazi $\{1, x, x^3 - 2x^2 - x + 2, 2x^3 - 3x^2 - 2x\}$, što se svodi na rješavanje sustava

$$\begin{cases} \alpha \qquad + 2\gamma \qquad = d \\ \qquad \beta - \ \gamma - 2\delta = c \\ \qquad\quad - 2\gamma - 3\delta = b \\ \qquad\qquad \gamma + 2\delta = a. \end{cases}$$

Rješenje ovog sustava je

$$\alpha = 6a + 4b + d,\ \beta = a + c,\ \gamma = -3a - 2b,\ \delta = b + 2a.$$

Dakle, ako označimo redom polinome u promatranoj bazi s p_1, p_2, q_1, q_2, onda je zapis od $p = p_M + p_N$ s obzirom na rastav $M \dot{+} N$ dan s

$$p = \underbrace{\Big((6a + 4b + d)p_1 + (a + c)p_2\Big)}_{p_M} + \underbrace{\Big((-3a - 2b)q_1 + (b + 2a)q_2\Big)}_{p_N}.$$

LINEARNA ALGEBRA 1

Prvi kolokvij - 23. studenog 2023.

ZADATAK 5

(10 bodova) Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor te L i M njegovi potprostori. Vrijede li sljedeće tvrdnje?

(a) Ako je G_L sustav izvodnica za L i G_M sustav izvodnica za M, tada je $G_L \cup G_M$ sustav izvodnica za $L + M$.

(b) Ako je B_L baza za L i B_M baza za M, tada je $B_L \cup B_M$ baza za $L + M$.

Ako tvrdnja vrijedi, detaljno ju dokažite, a ako ne vrijedi, navedite kontraprimjer.

Rješenje: (a) Tvrdnja vrijedi.

Dokaz: Neka je $v \in L + M$. Tada je $v = a + b$ za neke $a \in L$ i $b \in M$. Kako je G_L sustav izvodnica za L, postoje $a_1, \ldots, a_l \in G_L$ i $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \mathbb{F}$ takvi da je $a = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j a_j$. Isto tako, kako je G_M sustav izvodnica za M, postoje $b_1, \ldots, b_m \in G_M$ i $\beta_1, \ldots \beta_m \in \mathbb{F}$ takvi da je $b = \sum_{j=1}^{m} \beta_j b_j$. Tada je $v = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j a_j + \sum_{j=1}^{m} \beta_j b_j$, dakle v je linerna kombinacija elemenata $a_1, \ldots, a_l, b_1, \ldots, b_m$ koji pripadaju skupu $G_L \cup G_M$. Zbog proizvoljnosti elementa v zaključujemo da je $G_L \cup G_M$ sustav izvodnica za $L + M$.

(b) Tvrdnja ne vrijedi. Na primjer, neka je $V = \mathbb{R}^3$, $L = \{(x, y, 0) : x, y \in \mathbb{R}^3\}$ i $M = \{(x, 0, z) : x, z \in \mathbb{R}^3\}$. Tada je $B_L = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ baza za L i $B_M = \{(2, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ baza za M, ali $B_L \cup B_M$ nije baza za $L + M = \mathbb{R}^3$ jer ima 4 elementa u trodimenzionalnom prostoru.

(Još jedan kontraprimjer: $L = \mathbb{R}^2$ i $M = [\{(1, 1)\}]$. Označimo $a = (1, 1)$. Za L uzmemo kanonsku bazu $B_L = \{e_1, e_2\}$, a za M uzmemo $B_M = \{a\}$. Skup $B_L \cup B_M = \{e_1, e_2, a\}$ nije baza za $L + M = \mathbb{R}^2$ jer ima tri elementa u dvodimenzionalnom prostoru.)