MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

Drugi kolokvij - 31. siječnja 2024.

ZADATAK 1

(a) (5 bodova) Odredite sve $n \in \mathbb{N}$ za koje je matrica $A = (a_{ij}) \in M_n$ dana s

$$a_{ij} = \begin{cases} n-1, & i = j, \\ 1, & i \neq j \end{cases}$$

regularna.

(b) (3 boda) Neka je $A \in M_{3,4}$. Može li $A^T A$ biti regularna? U slučaju potvrdnog odgovora navedite jednu takvu, a u suprotnom pokažite odgovarajuću tvrdnju.

(c) **(Dodatna 2 boda)** Neka je $A \in M_n$ regularna matrica te $u, v \in M_{n1}$. Dokažite sljedeći identitet:

$$\det(A + uv^T) = \det A(1 + v^T A^{-1} u).$$

Rješenje:

(a)
- Za $n = 1$ je $A = \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$, pa A nije regularna u tom slučaju.
- Za $n \geq 2$ računamo odgovarajuću determinantu n-tog reda na sljedeći način:

$$\det A = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & n-1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & n-1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n-1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & n-1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{R_1 \text{ oduzmemo ostalima}}{=} \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2-n & n-2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2-n & 0 & n-2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2-n & 0 & 0 & \dots & n-2 & 0 \\ 2-n & 0 & 0 & \dots & 0 & n-2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{izlučimo } (n-2) \text{ iz } R_2,\dots,R_n}{=} (n-2)^{n-1} \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\text{dodamo } S_2,\dots,S_n \to S_1}{=} (n-2)^{n-1} \begin{vmatrix} 2(n-1) & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(n-1)(n-2)^{n-1}.$$

Dakle, vidimo da je A regularna $\iff \det A \neq 0 \iff n \geq 3$.

Napomena: Ovdje se moglo samo pozvati i na izvedenu formula za općenitiju matricu ovog oblika s vježbi,

$$a_{ij} = \begin{cases} a_i, & i = j, \\ x, & i \neq j, \end{cases}$$

za specijalan slučaj $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = n-1$ i $x = 1$, te komentirati samo za koje n je dobiveni izraz različit od nula.

(b) Za $A \in M_{3,4}$ je $A^T A \in M_4$. Kako je $r(A^T A) \leq r(A) \leq 3$, zaključujemo da $A^T A$ ne može biti regularna za niti jednu $A \in M_{3,4}$.

(c) Formiramo blok matricu čija će determinanta biti jednaka lijevoj strani jednakosti,

$$\begin{bmatrix} A + uv^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Blok transformacijama eliminiramo član uv^T iz bloka 1,1 na sljedeći način ("prirodan" poredak transformacija je naznačen ispod odgovarajućih matrica)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ v^T A^{-1} & 1 \end{bmatrix}}_{3.} \underbrace{\begin{bmatrix} I_n & u \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{2.} \begin{bmatrix} A + uv^T & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} I_n & 0 \\ -v^T & 1 \end{bmatrix}}_{1.} = \begin{bmatrix} A & u \\ 0 & 1 + v^T A^{-1} u \end{bmatrix}.$$

Primjenom Binet-Cauchyjevog teorema te odgovarajućih rezultata za determinante blok trokutastih matrica, slijedi tražena jednakost.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

Drugi kolokvij - 31. siječnja 2024.

ZADATAK 2

a) (8 bodova) Koristeći elementarne transformacije nad retcima, izračunajte inverz matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

b) (2 boda) Napišite matrični zapis elementarne transformacije koja, djelujući na retke matrice A, njen prvi stupac prevede u

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rješenje:

a)

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right].$$

b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

Drugi kolokvij - 31. siječnja 2024.

ZADATAK 3

(a) (9 bodova) U ovisnosti o realnom parametru λ odredite rang matrice

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 3 & \lambda \end{bmatrix}.$$

(b) (3 boda) Odredite za koje parametre $\lambda \in \mathbb{R}$ postoji matrica $B \in M_5(\mathbb{R})$ takva da je blok matrica

$$\begin{bmatrix} I & B \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

punog ranga, pri čemu je $I \in M_5(\mathbb{R})$, $0 \in M_{4,5}(\mathbb{R})$. Obrazložite!

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

Drugi kolokvij - 31. siječnja 2024.

ZADATAK 4

(a) (4 boda) Riješite sustav

$$\begin{cases} x_1 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 = 9 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 5 \end{cases}$$

(b) (4 boda) Ako je A matrica sustava iz (a) dijela zadatka, riješite sustav $\tilde{A}X = 0$, gdje je $\tilde{A}$ adjunkta matrice A.

(c) (4 boda) Dan je nehomogeni sustav $A'X = B$ od četiri linearne jednadžbe s četiri nepoznanice takav da je $r(A') = 2$. Ako su $(1, 0, 1, -1), (0, 1, 1, 0)$ i $(-1, 1, 1, 0)$ tri rješenja tog sustava, odredite sva njegova rješenja.

Rješenje:

(a)

$$A_p = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & -1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -1 & 5 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{R_2-2R_1}{R_4-R_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & 3 \end{array}\right] \underset{\sim}{\overset{R_2-5R_3}{\overset{R_4-3R_3}{R_2\leftrightarrow R_3}}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

odakle jednostavno očitavamo da je rješenje sustava dano s

$$C_0 + \Omega_A = (2, 1, 0, 0) + [\{(1, -1, 1, 0), (-2, 1, 0, 1)\}].$$

(b) Iz (a) dijela zadatka slijedi da je $r(A) = 2 \leq 4 - 2$. Na vježbama je pokazano da je tada $\tilde{A} = 0$. Stoga je rješenje sustava $\tilde{A}X = 0$ cijeli $\mathbb{R}^4$ (ili cijeli M_{41}).

(c) Kako je $r(A') = 2$, slijedi da je $\dim \Omega_{A'} = 2$. Već nam je poznato (barem) jedno partikularno rješenje, pa nam je za opis cijelog skupa rješenja potrebno još pronaći dva linearno nezavisna rješenja sustava $A'X = 0$. Označimo redom

$$X_1 = (1, 0, 1, -1), \quad X_2 = (0, 1, 1, 0), \quad X_3 = (-1, 1, 1, 0).$$

Tada zbog $A'X_1 = A'X_2 = A'X_3 = B$ slijedi

$$A'(X_1 - X_2) = A'(X_2 - X_3) = 0,$$

pa vidimo da su $(1, -1, 0, -1)$ i $(1, 0, 0, 0)$ dva linearno nezavisna rješenja homogenog sustava. Stoga je skup rješenja sustava $A'X = B$ dan s

$$(1, 0, 1, -1) + [\{(1, -1, 0, -1), (1, 0, 0, 0)\}].$$

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 1

Drugi kolokvij - 31. siječnja 2024.

ZADATAK 5

(8 bodova) Neka za matrice $A, B \in M_5$ vrijedi $r(A) = r(B) = 2$. Dokažite da sustavi $AX = 0$ i $BX = 0$ imaju bar jedno netrivijalno zajedničko rješenje.