

--	--

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 28. 11. 2023.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora niti ikakvih formula osim onih koje će vam biti podijeljene na početku pisanja.

1. (ukupno 18 bodova)

(a) (8 bodova) Odredite $f^{(2023)}(0)$ i $f^{(2024)}(0)$ za funkciju $f(x) = (x^2 + 2)e^{x^2}$.

(b) (10 bodova) Izračunajte s greškom manjom od 10^{-2}

$$\int_{-1}^1 (x^2 + 2)e^{x^2} dx.$$

Diferencijalni i integralni račun 2
prvi kolokvij, 28. 11. 2023.

2. (ukupno 16 bodova)

(a) (4 boda) Odredite radijus konvergencije reda potencija

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{\sqrt{2} \cdot n} \right)^{n^2} x^n.$$

(b) Ispitajte konvergiraju li redovi

(1) (6 bodova) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} (\sqrt{2n+2} - \sqrt{2n})$

(2) (6 bodova) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + 2n + n \cdot \ln(n)}{n^3 \sqrt{n} + 3n}$.

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 28. 11. 2023.

3. (ukupno 16 bodova)

(a) (7 bodova) Izračunajte limes:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2) - x^2 \cos x}{x^6}.$$

(b) (9 bodova) Krivulja je zadana parametrizacijom $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$c(t) = \left(e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \cos t, e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \sin t, e^{\frac{t}{\sqrt{2}}} \right).$$

Dokažite da ova krivulja leži na stošcu $x^2 + y^2 = z^2$. Odredite kut između tangencijalne ravnine na stožac i zadane krivulje u točki $T = (1, 0, 1)$.

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 28. 11. 2023.

4. (10 bodova) Nađite primjere redova potencija

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n \text{ i } \sum_{n=1}^{+\infty} b_n x^n$$

tako da $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ ima radijus konvergencije 2 , $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ ima radijus konvergencije 3, a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) x^n$$

ima radijus konvergencije 6.

5. (10 bodova) Neka je $f : \mathbf{R}^3 \rightarrow [0, +\infty)$ zadana formulom

$$f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z} .$$

- (a) Odredite i opišite njenu prirodnu domenu D_f .
 (b) Da li je $f : D_f \rightarrow [0, +\infty)$ surjekcija?
 (c) Da li je $f : D_f \rightarrow [0, +\infty)$ injekcija?
6. (10 bodova) Nađite primjer funkcije dviju varijabli f takve da je

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) \right) = 2 \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) \right) .$$

7. (10 bodova) Ako postoje, odredite brojeve A i B tako da funkcija

$$f(x, y) = Ax^3 + By^3 - x - y - 4$$

u točki $T(1, 1)$ ima lokalni minimum, a u točki $P(-1, -1)$ lokalni maksimum. Ako takvi A i B ne postoje, obrazložite.

8. (10 bodova) Ako postoji, odredite točku $T(x, y, z)$ na plohi $z = x \sin y$ u kojoj je normala paralelna s pravcem

$$\frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1} .$$

Ako ne postoji, obrazložite.