$1a$	$1b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 28.11.2014.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Dozvoljeno je korištenje službenih formula s trigonometrijskim formulama, tablicom derivacija i integrala. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora.

1. (a) (8 bodova) Odredi Taylorov polinom drugog stupnja, oko nule, za funkciju

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}.$$

(b) (8 bodova) Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je $|f^{(3)}(x)| < 3$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Izračunajte ocjenu greške pri aproksimaciji $f(-\frac{1}{3})$, Taylorovim polinomom stupnja 2, oko nule.

2a	2b

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 28.11.2014.

2. (a) (10 bodova) Odredite i obrazložite da li redovi $\sum \frac{k^2 \ln k}{(k-1)^3}$ i $\sum \frac{(-1)^k (k!)^2}{(2k+1)!}$ konvergiraju.

   (b) (8 bodova) Odredite radijus konvergencije reda potencija $\sum \frac{(-1)^k}{e^k} x^k$.

3a	3b

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 28.11.2014.

3. (a) (8 bodova) Izračunajte $D(f \circ g)(0, \frac{\pi}{4})$ ako su $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zadane s

$$f(x, y) = e^{-2x^2-3y^2}, \quad g(u, v) = (\cos(u + v), \ln(1 + u^2)).$$

(b) (8 bodova) Napišite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu $z = 16 - 4x^2 - y^2$ koja prolazi točkom $P(x_0, y_0, z_0)$ i nakon toga odredite točku $P(x_0, y_0, z_0)$ u kojoj je tangencijalna ravnina na tu plohu okomita na pravac $x = 3+4t, y = 2t, z = 2-t$.

4	5	6	7	8

PROFESOR

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 28.11.2014.

4. (10 bodova) Pokažite da funkcija $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ nema limes u $(0,0)$.

5. (10 bodova) Neka je funkcija $f(x)$ zadana pomoću reda potencija

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

   Dokažite da vrijedi $f''(x) = f(x)$.

6. (10 bodova) Dokažite da red $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergira koristeći integralni test.

7. (10 bodova) Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$. Dokažite

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(||f(t)||^2\right) = 2f(t) \cdot f'(t),$$

   gdje $\cdot$ označava skalarni produkt.

8. (10 bodova) Skicirajte skup

$$\left\{(x,y,z) \colon x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0, x^2 + y^2 = 4\right\}.$$

   Na osnovu skice odredite da li je skup otvoren, zatvoren, ili ni jedno ni drugo.

$1a$	$1b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 28.11.2014.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Dozvoljeno je korištenje službenih formula s trigonometrijskim formulama, tablicom derivacija i integrala. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora.

1. (a) (8 bodova) Odredi Taylorov polinom drugog stupnja, oko nule, za funkciju

$$f(x) = \frac{x-3}{x+2}.$$

(b) (8 bodova) Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takva da je $|f^{(3)}(x)| < 2$ za sve $x \in \mathbb{R}$. Izračunajte ocjenu greške pri aproksimaciji $f(-\frac{1}{2})$, Taylorovim polinomom stupnja 2, oko nule.

2a	2b

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 28.11.2014.

2. (a) (10 bodova) Odredite i obrazložite da li redovi $\sum \frac{k \ln k}{(k+1)^3}$ i $\sum \frac{(-1)^{n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}$ konvergiraju.

   (b) (8 bodova) Odredite radijus konvergencije reda potencija $\sum \frac{3^k}{\sqrt{k}} x^k$.

$3a$	$3b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 28.11.2014.

3. (a) (8 bodova) Izračunajte $D(g \circ f)(0, -\frac{\pi}{4})$ ako su $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadane s

$$f(u, v) = (\ln(1 + u^2), \sin(u + v)), \quad g(x, y) = e^{-3x^2 - 2y^2}.$$

   (b) (8 bodova) Napišite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu $z = 9 - 3x^2 - y^2$ koja prolazi točkom $P(x_0, y_0, z_0)$ i nakon toga odredite točku $P(x_0, y_0, z_0)$ u kojoj je tangencijalna ravnina na tu plohu okomita na pravac $x = 6t, y = 5+4t, z = 3-t$.

4	5	6	7	8

PROFESOR

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 28.11.2014.

4. (10 bodova) Pokažite da funkcija $f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ nema limes u $(0,0)$.

5. (10 bodova) Neka je funkcija $f(x)$ zadana pomoću reda potencija

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Dokažite da vrijedi $f''(x) = -f(x)$.

6. (10 bodova) Dokažite da red $\sum \frac{1}{n}$ ne konvergira koristeći integralni test.

7. (10 bodova) Dokažite da je $0.999\ldots = 1$ koristeći činjenicu da beskonačni decimalni broj $0.a_1a_2a_3\ldots$ možemo shvatiti kao red $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{10^i}$.

8. (10 bodova) Skicirajte nivo–plohu $f(x,y,z) = c$ funkcije $f(x,y,z) = z^2 - x^2 - y^2$ za $c = 1$. Kako se zove taj geometrijski objekt?