

# Linearna algebra 2

## 2. zadaća

1. Zadani su polinomi  $p(x) = x$  i  $q(x) = 3x^2 - 1$  u prostoru  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ . Ispitajte jesu li  $p$  i  $q$  ortogonalni s obzirom na skalarni produkt

a)  $\langle p|q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t)dt,$

b)  $\langle p|q \rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt,$

- c) Možete li definirati još neki skalarni produkt na prostoru  $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$  tako da zadani vektori budu ortogonalni s obzirom na taj skalarni produkt?

2. Pomoću Gramove matrice ispitajte jesu li sljedeći skupovi vektora linearno nezavisni u odgovarajućem prostoru:

a)  $\{(-2i, i, 5 + i), (-1, -3i, i)\}$  u  $\mathbb{C}^3$ ,

b)  $\{(1, 1, 0), (2, 5, 1), (-11, 1, 6)\}$  u  $\mathbb{R}^3$ ,

c)  $\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right\}$  u  $M_2(\mathbb{R})$ ,

d)  $\{1 + t + 2t^2, 3 + t^2\}$  u  $\mathcal{P}_2([0, 1])$ .

3. Nadite sve vektore koji su ortogonalni na sve elemente skupa

$$S = \{(1, 0, -3, 2), (0, 1, -1, 0), (4, 5, 2, -1)\} \subset \mathbb{C}^4$$

s obzirom na standardni skalarni produkt. Čini li skup tih vektora vektorski prostor? Ako da, koje dimenzije?

4. U prostoru matrica  $M_2(\mathbb{C})$ , s obzirom na standardni skalarni produkt, odredite skup svih matrica ortogonalnih na matricu  $\begin{bmatrix} 1 & i \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ . Čini li skup tih vektora vektorski prostor? Ako da, koje dimenzije?

5. Dokažite da za sve  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$  vrijede sljedeće nejednakosti:

- a)  $(ac+2bd+3)^2 \leq a^2+b^2+9c^2+36d^2+a^2c^2+4a^2d^2+b^2c^2+4b^2d^2+9$ ,
- b)  $(2a-13b+43c)^2 \leq 2022(a^2+b^2+c^2)$
6. a) Neka je  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  te  $\|\cdot\|$  neka norma na  $\mathbb{R}^2$ . Je li tada preslikavanje  $s(x) = \|Ax\|$ ,  $x = (x_1, x_2)$  norma na  $\mathbb{R}^2$ ?
- b) Neka je  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$  te  $\|\cdot\|$  neka norma na  $\mathbb{R}^2$ . Je li tada preslikavanje  $s(x) = \|Ax\|$ ,  $x = (x_1, x_2)$  norma na  $\mathbb{R}^2$ ?
- c) (opcionalno) Neka je  $A \in M_2(\mathbb{R})$  te  $\|\cdot\|$  neka norma na  $\mathbb{R}^2$ . Odredite nužne i dovoljne uvjete na matricu  $A$  uz koje je preslikavanje  $s(x) = \|Ax\|$ ,  $x = (x_1, x_2)$  norma na  $\mathbb{R}^2$ .