

1. Uvod

Naziv meteorologija potječe od starogrčke riječi *meteorologia* (μετεωρολογία), što znači proučavanje nebeskih pojava. U Antičkoj Grčkoj taj pojam je obuhvaćao praćenje svih nebeskih pojava i padanja različitih projektila na tlo, od kapljica kiše, pa do meteorita. Danas pod meteorologijom podrazumijevamo znanost vezanu isključivo uz atmosferske fenomene.

Začeci meteorologije sežu još u doba Antike. Thales (640. g. pr. Kr.) postojanje godišnjih doba pripisuje promjenjivosti položaja Sunca. Hipokrat u 5. stoljeću pr. Kr. u svojoj knjizi '*Zrak, vode i mjesta*' postavlja temelje današnje biometeorologije, povezujući neke vremenske prilike s bolestima. Tako na primjer preporuča da se bolesniku ne daje purgative, ne pušta krv, niti ne spaljuju rane bar 10 dana nakon burnih promjena godišnjih doba.

Oko 340. godine pr. Kr. Aristotel u djelu '*Meteorologika*' opisuje vlastita opažanja, te sabire dotadašnja saznanja i vjerovanja Sredozemnih kultura vezana uz nebo, vrijeme i klimu, koristeći pri tom filozofska i povjesna, te poeziju. U '*Meteorologiki*' Aristotel predlaže vlastite teorije o nastanku kiše, oblaka, tuče, grmljavine, munje i uragana, a temelji ih na dvijema osnovnim pretpostavkama. Pretpostavlja da je meteorologija ograničena na prostor između Zemlje i Mjeseca. Nadalje, smatra da se taj prostor sastoji od četiri temeljna elementa: zemlje, vode, zraka i vatre. Stotinjak godina kasnije, Arhimed (rođen 287. g. pr. Kr.) otkriva princip uzgona, koji se još uvijek koristi u suvremenim istraživanjima rastućih kumulusa. Klasične civilizacije uočavale su i problem onečišćenosti atmosfere, čije proučavanje je nemoguće bez poznavanja meteorologije. Tako se, naprimjer, već 61. g. n. e. Seneka žali na loš zrak u Rimu.

Antičke teorije vremena i klime, a naročito Aristotelova '*Meteorologika*' ostati će jedine i općeprihvaćene sve do razdoblja Prosvjetiteljstva. Tek tada čovječanstvo postavlja temelje pravoj znanosti, u kojoj eksperimenti imaju neizostavnu ulogu. Znatno ranije Leonardo da Vinci (1452. – 1519.) skicira mehanički indikator vlage pomoću ljudske vlasi, dok će oko dva stoljeća kasnije njemački matematičar Johann Heinrich Lambert razviti higrometar. Evangelista Torricelli u 17. stoljeću izrađuje prvi živin barometar. Njegov suvremenik i prijatelj Galileo Galilei izrađuje vodeni termometar, a Nizozemac Cornelis Drebbel vinski termometar. Međutim, oba se instrumenta smrzavaju na niskim temperaturama.

U 17. stoljeću dolazi do velikih napredaka u kemiji, fizici i matematici, te do izuma mjernih instrumenata. Robert Boyle 1661. otkriva zakon plina koji povezuje tlak i gustoću pri konstantnoj temperaturi, a Isaac Newton 1666. razvija diferencijalni račun, koji će se kasnije pokazati neophodnim pri matematičkom rješavanju meteoroloških problema, te ga stoga možemo smatrati temeljem moderne dinamičke meteorologije. Edmund Halley (1656. – 1742.) prvi uočava vezu između opće cirkulacije atmosfere i razdiobe Sunčeve energije na Zemljinoj površini. Halley objašnjava postojanje pasata i monsuna. Negdje oko 1800. William Herchel otkriva postojanje infracrvenog zračenja, koje je od velike važnosti kako za toplinsku ravnotežu sustava Zemlja-atmosfera, tako i za efekt staklenika. Ipak, unatoč golemom napretku, neki od znanstvenika ostaju skeptični. Takon npr. Francois Arago (1783-1856) kaže: 'Nikad, bez obzira na napredak znanosti neće se pošteni znanstvenik, koji drži do svoje reputacije, usuditi da prognozira vrijeme'.

Nakon Krimskog rata, u kojem je francuska flota uništena u oluji na Crnom moru (1856.), Napoleon III angažira astronoma Urbana Leverriera na poslovima prognoze oluja i vremena. Leverrier prikuplja postojeće podatke o vremenu na temelju kojih izrađuje prve primitivne

dijagnostičke vremenske karte za područje Crnog mora, te uspijeva pratiti gibanje oluja tijekom vremena. Time postavlja temelje **sinoptičkoj meteorologiji**, koja se bavi analizom i prognozom vremena, a usko je povezana s dinamičkom meteorologijom. Međutim, zbog vrlo malog broja meteoroloških podataka, te zbog nemogućnosti njihove brze razmjene, do napretka u meteorologiji neće doći sve do I Svjetskog Rata, kada zbog potreba avijacije neke zemlje počinju uvoditi redovita meteorološka motrenja i mjerenja.

Velik teorijski napredak u dinamičkoj meteorologiji događa se u prvoj polovici 20. stoljeća. U norveškom gradu Bergenu okuplja se tim istraživača pod vodstvom oca Vilhelma i sina Jacoba Bjerknesa, poznat bod nazivom 'Bergenska škola'. Bergenska škola uvodi koncept fronta i zračnih masa, te postavlja valnu teoriju nastanka ciklona. Uvođenjem diferencijalnih jednadžbi, koje opisuju dinamiku fluida (a to su jednadžbe gibanja, termodinamička jednadžba energije, hidrostatska jednadžba, jednadžba sačuvanja mase i jednadžba stanja), Bergenska škola postavlja temelje numeričkoj prognozi vremena. Jedan od njenih učenika, čija se dostignuća smatraju prekretnicom u svjetskoj meteorologiji, je i Švedanin Carl-Gustaf Rossby (1898. – 1957.).

Na temelju Bjerknesovog koncepta Lewis Fry Richardson 1922. g. dobiva prve rezultate numeričke prognoze vremena, koji su zbog velikih numeričkih pogrešaka razočaravajući. Međutim, zahvaljujući izumu računala (1940. g.), za što je zaslužan John von Neuman, te razvoju tehnologije općenito, tempo razvoja meteorologije kao znanosti u drugoj polovini dvadesetog stoljeća naglo se ubrzava. Premda matematičar, von Neuman se između ostalog počinje baviti i numeričkom prognozom vremena, te 1946. godine zajedno s meteorologom Julesom Charneyem započinje na sveučilištu Princeton meteorološki projekt, čime će se računala prvi put u povijesti upotrijebiti upravo u području meteorologije.

Područje meteorologije koje se bavi strujanjima u atmosferi, a koja utječu na vrijeme i klimu, nazivamo **dinamička meteorologija**. Dinamika proučava vezu između sila i gibanja. Poput većine plinova i tekućina i Zemljina atmosfera je fluid. Stoga dinamiku atmosfere, kao i dinamiku oceana (koji je također fluid), često zovemo dinamika fluida ili hidrodinamika. Pri tom pod fluidom podrazumijevamo bilo koji medij koji ne može podnijeti napetost smicanja, a da pri tom ostane u stanju mirovanja. Kod fluida i najslabija napetost smicanja mora uzrokovati gibanje. Gibanja u atmosferi podvrgnuta su trima osnovnim fizikalnim zakonima. To su zakon sačuvanja mase, zakon sačuvanja impulsa, te zakon sačuvanja energije.

1.1 Opća saznanja o atmosferi

Atmosfera je plinoviti omotač koji obavija naš planet. Naziv atmosfera potječe od grčke riječi *atmosfaira* (ατμόσφαιρα), gdje *atmos* (ατμός) znači para, a *sfaira* (σφαίρα) kugla. Dok neki planeti nemaju atmosfere, Venera na primjer ima gustu, a Mars vrlo rijetku atmosferu u usporedbi sa Zemljom. Gustoća atmosfere ovisi o temperaturi samog planeta, dakle o kinetičkoj energiji molekula i atoma plinova od kojih se atmosfera sastoji. Prosječna temperatura Zemljine površine, koju zovemo Zemljina ravnotežna temperatura, iznosi 15°C. Masa atmosfere iznosi $M_A = 6 \cdot 10^{18}$ kg, dok je masa Zemlje milijun puta veća ($M_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg).

Na temelju radiometrijskog određivanja starosti smatra se da su i Zemlja i njena atmosfera stare oko 4.5 milijardi godina, dok se za Sunce smatra da je oko 100 milijuna godina starije. U početku je Zemlja bila toliko vruća tako da se na njenoj površini voda nije

mogla kondenzirati. Stoga je planet bio okružen gustom parom, koja se uglavnom sastojala od molekula vode (H_2O), dok su ostali plinovi poput vodika (H_2), dušika (N_2), ugljičnog dioksida (CO_2) i ugljičnog monoksida (CO), bili prisutni u malim količinama. S vremenom se vodena para kondenzirala, a padanjem kiše nastao je ocean koji je okruživao cijeli planet. Glavnina H_2 je otišla u svemir, dok su N_2 , CO_2 i možda CO ostali kao osnovni sastojci atmosfere. U to doba količina dušika u atmosferi vjerojatno je bila slična današnjoj, te je bila dovoljna da tlak na Zemljinoj površini bude oko 800 hPa. (U današnje vrijeme srednji atmosferski tlak na razini mora je 1013 hPa.) Međutim, količina CO_2 u atmosferi bila je vjerojatno nekoliko redova veličina veća nego danas. Većina Zemljinog CO_2 vremenom je kemijskim transformacijama prešla u karbonatne stijene poput vapnenca ($CaCO_3$). Vjeruje se da kisik (O_2) i ozon (O_3) u ranoj fazi Zemljine atmosfere nisu postojali u znatnijim količinama, već da su im koncentracije naglo porasle prije približno 2 milijarde godina.

Premda atmosferski atomi i molekule posjeduju kinetičku energiju, oni ne napuštaju atmosferu, već ostaju u blizini planeta, budući da ih privlači gravitacijska sila. Stoga je atmosfera, s obzirom na dimenzije Zemlje, plitak fluid. Srednji radijus Zemlje je $R_Z = 6371$ km, dok visina atmosfere ne prelazi 1000 km. Zbog gravitacijskog djelovanja gustoća atmosfere opada visinom. Stoga se oko 50 % mase atmosfere nalazi u prvih 5 km visine, 75 % mase nalazi se u prvih 10 km, a čak 90 % mase u prvih 20 km visine. Na oko 500 km nad tlom zrak je toliko rijedak da se u kubičnom metru zraka nalazi ~ 1 molekula. Pokoja molekula može se naći i do 1000 km visine. U tim visinama molekule su najčešće ionizirane zbog djelovanja Sunca.

1.1.1. Sastav, radijacijsko-apsorpcijska svojstva i vertikalna struktura atmosfere

Atmosfera je smjesa plinova, a u njoj se u malim količinama nalaze i suspendirane krute i tekuće čestice poput prašine i oblačnih kapljica. U čistoj atmosferi, čiji je sastav u donjoj atmosferi prikazan u Tablici 1.1, neki plinovi prisutni su u gotovo konstantnom omjeru (količina im se može mijenjati na geološkoj vremenskoj skali), te ih stoga nazivamo kvazipermanentnim, dok je količina ostalih promjenjiva ili jako promjenjiva.

Atmosferu s obzirom na sastav dijelimo na **homosferu** i **heterosferu**. Donjih 80 km atmosfere nazivamo homosferom. U homosferi su volumni odnosi pojedinih kvazipermanentnih plinova konstantni, dok se količina ostalih sastojaka mijenja. U heterosferi, koja se nalazi iznad homosfere, volumni odnosi atmosferskih plinova variraju, zbog fotodisocijacije uzrokovane ultraljubičastim (UV) i rendgenskim¹ Sunčevim zračenjem. U heterosferi se djelovanjem UV zračenja događa fotodisocijacija molekularnog kisika (O_2). Stoga koncentracija O_2 opada visinom, a koncentracija atomskog kisika (O) raste. Već na 130 km visine, samo jedna trećina kisika nalazi se u molekularnoj formi, dok se na 500 km visine gotovo sav kisik nalazi u atomskoj formi. Molekularni dušik (N_2) se teže disocira. Stoga je na 500 km visine koncentracija atomskog dušika (N) mala.

U visokoj atmosferi sastojci zraka apsorbiraju UV zračenje, te se zbog toga ioniziraju. Iznad 60 km visine u atmosferi se nalazi puno više iona nego u manjim visinama. Gustoća elektrona maksimalna je na visinama između 250-500 km, stoga se taj dio atmosfere naziva

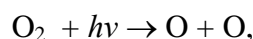
¹ UV dio spektra ima valne duljine u rasponu od 10^{-4} do 0.4 μm , a rendgensko ili X-zračenje valne duljine do 200 nm.

ionosfera. Ionosfera utječe na propagaciju radiovalova, ali za meteorološke procese nije važna. Stoga je u dinamičkoj meteorologiji nećemo proučavati.

Tablica 1.1. Sastav čistog zraka u donjoj atmosferi.

	plin		molekularna masa	volumni udio (%)	maseni udio (%)	boravak u atmosferi
gotovo konstantan omjer	O ₂	kisik	32.00	20.95	23.1	5·10 ³ god.
	N ₂	dušik	28.01	78.09	75.5	10 ⁶ god.
	Ar	argon	39.95	0.93	1.3	
	Ne	neon	20.18	1.8·10 ⁻³	1.3·10 ⁻³	
	He	helij	4.01	5.2·10 ⁻⁴	7.2·10 ⁻⁵	10 ⁷ god.
	Kr	kripton	83.80	1.1·10 ⁻⁴	3.3·10 ⁻⁴	
	Xe	ksenon	131.30	8.6·10 ⁻⁶	3.9·10 ⁻⁵	
	Rn	radon	222.00	6.0·10 ⁻¹⁸		
promjenjiv omjeru	CO ₂	ugljkov dioksid	44.01	3.6·10 ⁻²	4.6·10 ⁻²	5-6 god.
	CH ₄	metan	16.04	1.4·10 ⁻⁴	7.8·10 ⁻⁵	4-7 god.
	H ₂	vodik	2.01	5·10 ⁻⁵	3.5·10 ⁻⁶	6-8 god.
	N ₂ O	dušikov oksid	44.01	1·10 ⁻⁷	3.1·10 ⁻⁷	25 god.
	O ₃	ozon	48.00	2·10 ⁻⁶	6·10 ⁻⁶	10 god
jako promjenjiv omjer	H ₂ O	vodena para	18.02	≤ 4.0		10 dana
	CO	ugljkov monoksid	28.01	1·10 ⁻⁵	2·10 ⁻⁵	0.2-0.5 god.
	NO ₂	dušikov dioksid	46.01	2.3-3.5·10 ⁻⁵		8-10 dana
	NH ₃	amonijak	17.03	1·10 ⁻⁶	1·10 ⁻⁶	5 dana
	SO ₂	sumporov dioksid	64.06	2·10 ⁻⁸	9·10 ⁻⁸	2 dana
	H ₂ S	sumporovodik	34.08	≤ 0.6·10 ⁻⁷		0.5 dana
	organski ugljik (bez CH ₄ i halogenougljika)				2 dana	

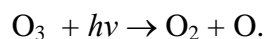
Ozon (O₃) se u znatnijim količinama nalazi u višoj atmosferi i to u visinama od oko 10 do 50 km. Taj sloj više atmosfere zove se **ozonosfera**. Ozon u višoj atmosferi nastaje u dva koraka. U prvom koraku, molekula kisika apsorbira UV Sunčevo zračenje, te stoga fotodisocira:



gdje je $h\nu$ energija fotona UV zračenja, čije su valne duljine manje od 240 nm (1 nm = 10⁻⁹ m), h je Planckova konstanta $h = 6.625 \cdot 10^{-34}$ J s, a ν je frekvencija zračenja (s⁻¹). U drugom koraku uz prisustvo trećeg tijela (M) dolazi do sudara (kolizije) atoma i molekule kisika:



Do kolizije najčešće dolazi na visinama do oko 50 km, budući da u tom području još uvijek ima dovoljno kisika u molekularnoj formi. Istovremeno, ozon se i sam raspada zbog fotodisocijacije:



Međutim, za fotodisocijaciju ozona odgovorne su valne duljine u rasponu od 200 do 300 nm.

Najviše ozona nastaje u tropima na visinama iznad 25 km. To je područje u kojem je postignuta ravnoteža između raspoloživog kisika (čija koncentracija opada visinom) i Sunčevog UV zračenja (koje raste visinom). Ozon se atmosferskim gibanjima prenosi prema polovima. Stoga se najviše ozona ($\sim 6 \cdot 10^{12}$ molekula po cm^3) nalazi u tropima na visini od 25 km, dok je nad polovima maksimum na 18 km visine.

Količina ozona u atmosferi najčešće se izražava u Dobsonovim jedinicama (DU) kao ukupna količina O_3 koja se nalazi u vertikalnom stupcu zraka koji se proteže od tla do vrha atmosfere. Kada bi sav ozon iz vertikalnog stupca doveli na standardni tlak (1013 hPa) i temperaturu (0°C) ne mijenjajući pri tom veličinu baze stupca, stupac ozona visok 10^{-5} m bio bi jednak jednoj DU. Uobičajena količina ozona u atmosferi je 300 DU.

Premda je količina ozona u atmosferi relativno mala (maksimalne koncentracije ne prelaze 10 ppm^2), njegova važnost za život na Zemlji je ogromna. Osim ozona ni jedan od preostalih sastojaka atmosfere ne apsorbira UV zračenje u rasponu od 240 do 290 nm. Ozon međutim apsorbira gotovo svu radijaciju u tom dijelu spektra. Kad bi to zračenje došlo do Zemljine površine, oštetilo bi genetički materijal, a fotosinteza, koja je neophodna za biljni svijet, bila bi onemogućena. Nadalje, zbog svojih apsorpcijskih svojstava ozon ima važnu ulogu u radijacijskoj ravnoteži sustava Zemlja-atmosfera, te utječe na termalnu strukturu atmosfere.

Posljednjih desetljeća puno pažnje pridaje se problemu 'ozonske rupe'. Sredinom sedamdesetih godina 20. stoljeća nad Antarktikom je u ozonosferi uočeno veliko smanjenje koncentracije ozona s obzirom na ranija razdoblja. Kemičari atmosfere pripisuju to smanjenje ljudskom djelovanju, odnosno antropogenoj emisiji klorofluorouglijaka (CFC, koji su poznati i pod nazivom freoni). Najveće smanjenje (ponegdje čak do 99%) uočeno je na visinama od 14-19 km nad tlom. Kako bi spriječila pogubno djelovanje ozonske rupe na život na Zemlji, međunarodna zajednica ulaže velike napore da se emisija CFC svede na minimum.

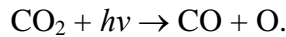
Za razliku od ozona u ozonosferi, koji je neophodan za život na Zemlji, ozon pri tlu je je opasan. U manjim količinama iritira očnu sluznicu, grlo, nos i dišne puteve, dok u velikim koncentracijama može biti smrtonosan. Posljednjih desetljeća ozon pri tlu nastaje fotokemijskim reakcijama u urbanoj atmosferi bogatoj dušikovim oksidima NO i NO_2 (koji se najčešće kraće označavaju s NO_x). NO_x , koji su posebno aktivni u atmosferskom ciklusu ozona, u atmosferu dopijevaju u većim količinama kao posljedica ljudskih aktivnosti (naročito prometa). Stoga se u velikim gradovima s gustim prometom, koji obiluju Sunčevim zračenjem, a nalaze se u toplim i suhim klimama (poput npr. Rima, Tokija, Atene i Los Angelesa), javlja onečišćenje zraka poznato pod nazivom 'fotokemijski smog'. U tako onečišćenoj atmosferi uz O_3 i NO_x nalaze se i organski nitrati, poput PAN-a³, oksidirani ugljikovodici i tzv. fotokemijski aerosol, a nad gradom se zbog velike količine aerosola može vidjeti žućkasto-smeđi oblak, koji je zbog svog čestog pojavljivanja nad Atenom dobio ime *nefos* (od grčke riječi νεφος, što znači oblak).

Ugljikov dioksid je plin bez mirisa. Teži je od suhog zraka. U našoj atmosferi ga približno ima oko 0.036 %, ili volumno oko 360 ppm (podaci za 1994. godinu), dok je u atmosferama Marsa i Venere glavni sastojak. CO_2 dopijeva u atmosferu biološkim i prirodnim procesima (npr. disanjem, fotosintezom, vulkanskim erupcijama i drugim), te

² ppm – Udio neke tvari izražen u dijelovima milijuna. Koncentracija tvari izražena u $\mu\text{g m}^{-3}$ izračuna se iz: koncentracija ($\mu\text{g m}^{-3}$) = molekularna masa x koncentracija (ppm)/0.0245.

³ PAN – peroksiacetil nitrat $\text{CH}_3\text{C}(\text{O})\text{OONO}_2$

sagorijevanjem fosilnih goriva (ugljena i nafte). Zbog apsorpcije Sunčevog zračenja valnih duljina $\lambda < 0.1690 \mu$ atmosferski CO_2 disocira u CO i atomski kisik:



CO_2 je uz vodenu paru jedan od najvažnijih atmosferski apsorbera Zemljinog dugovalnog zračenja, koje zovemo još i toplinsko ili infracrveno⁴ (IC) zračenje. Zbog apsorpcije IC zračenja na molekulama CO_2 atmosfera se zagrijava, atmosferski CO_2 i sam počinje dugovalno zračiti, te tako doprinosi zagrijavanju Zemljine površine. Stoga CO_2 poput ozona i vodene pare također utječe na toplinsku ravnotežu sustava Zemlja-atmosfera. Prema nekim proračunima, kada u atmosferi ne bi bilo CO_2 , prosječna temperatura Zemljine površine bi sa 15°C pala na -10°C . Koncentracija CO_2 najveća je u gradovima, a kako je CO_2 teži od zraka, to mu je koncentracija najveća pri tlu.

Danas u atmosferi ima gotovo 30% više CO_2 nego prije dvjestotinjak godina, a posljednjih desetljeća porast koncentracije CO_2 iznosi čak 0.5 % godišnje. Istovremeno, srednja temperatura pri tlu, gledajući Zemlju u cjelini, u posljednjih stotinjak godina povisila se za oko $0.5^\circ\text{C} \pm 0.2^\circ\text{C}$. To **globalno zatopljenje** najvećim dijelom se pripisuje porastu koncentracije CO_2 u atmosferi počev Industrijske revolucije do danas, ali pospješeno je i antropogenom emisijom drugih apsorbera IC zračenja.

Zahvaljujući rasponu atmosferskih temperatura, vodena tvar se u atmosferi može naći u sva tri agregatna stanja: plinovitom, tekućem i krutom. Vodena para⁵ je vrlo varijabilan atmosferski sastojak, a njena količina se mijenja i prostorno i vremenski. Volumno je u atmosferi može biti najviše 4%. Najviše je ima u tropima, a najmanje u polarnom području. Vodena para u atmosferu dospjeva isparavanjem (evaporacijom) s vodenih površina i vlažnog tla, te transpiracijom biljaka. Oba procesa zajedno nazivamo **evapotranspiracija**. Kako se evapotranspiracija događa na Zemljinoj površini, koncentracija vodene pare opada visinom, te se sva vodena para nalazi u prvih dvadesetak km atmosfere. Vodena para vrlo efikasno apsorbira toplinsko zračenje, te i sama zrači dugovalno. Stoga (poput O_3 i CO_2) bitno utječe na toplinsku ravnotežu sustava Zemlja-atmosfera.

U atmosferi se osim plinova i vodene pare nalaze još i aerosoli. Aerosoli su tekuće ili krute čestice suspendirane u zraku. Promjer im je u rasponu od $0.005 \mu\text{m}$ do $20 \mu\text{m}$, a važni su za procese nastanka oblaka. Količina aerosola je i prostorno i vremenski jako varijabilna. U atmosferu dospjevaju iz prirodnih i iz antropogenih izvora.

Onečišćujuće tvari ili polutanti su tvari u tekućoj, plinovitoj ili krutoj fazi, koje se u atmosferi nalaze u koncentracijama opasnim po živa bića. U atmosferu dolaze prirodnim putem (npr. emisijom vulkana, šumskim požarima i drugim), te ljudskom aktivnošću. Neke od tih tvari prirodni su sastojci čiste atmosfere, ali se u čistoj atmosferi nalaze u manjim koncentracijama, te ih tada ne smatramo polutantima. Drugi pak postoje samo u onečišćenoj atmosferi. Posljednjih desetljeća intenzivno se proučavaju različiti aspekti i posljedice

⁴ IC zračenje ima valne duljine u rasponu od 0.7 do $400 \mu\text{m}$.

⁵ Para i plin su dva različita pojma. Plin je normalno agregatno stanje tvari na temperaturi koja je viša od temperature vrenja. Npr. na Veneri, čija je temperatura puno viša od 100°C , sva vodena tvar nalazi se u plinovitoj fazi. Za razliku od toga, para je plinovito stanje u kojem se pri temperaturi nižoj od vrelišta nalazi manji dio tvari zbog toga što pojedine molekule zbog svoje kinetičke energije napuštaju tekuću fazu (isparavaju). To se npr. događa na Zemlji gdje imamo vodenu paru, a ne plin H_2O .

onečišćenja atmosfere (poput kiselih kiša, ozonske rupe, globalnog zatopljenja, pojave ozona pri tlu i drugog).

Uz globalno zatopljenje vezan je pojam neodgovarajućeg ali, uvriježenog naziva **efekt staklenika**, koji je još u 18. stoljeću francuski fizičar i matematičar Jean Baptiste-Joseph Fourier. Pod efektom staklenika podrazumijevamo zagrijavanje Zemljine površine i donje atmosfere uzrokovano apsorpcijom IC zračenja, koja se događa na tzv. stakleničkim plinovima. Najvažniji staklenički plinovi, dakle plinovi koji efikasno apsorbiraju toplinsko zračenje, jesu H₂O, CO₂, CH₄, CFC, O₃ i dušik(I)oksid (N₂O). Staklenički plinovi, zbog apsorpcije IC zračenja zagrijavaju atmosferu, odnosno dio topline, koja bi inače otišla u svemir, zadržavaju u atmosferi. Istovremeno zbog apsorpcije IC zračenja ti plinovi i sami počinju dugovalno zračiti u svim smjerovima (to zračenje nazivamo protuzračenje atmosfere). Dio protuzračenja atmosfere odlazi i prema Zemljinoj površini, te tako doprinosi njenom zagrijavanju, odnosno utječe na toplinsku ravnotežu sustava Zemlja-atmosfera. Toplinska ravnoteža sustava postiže se kad energija koja ulazi u sustav bude jednaka energiji koja napušta sustav. Kada ne bi bilo atmosferskog prirodnog 'stakleničkog' djelovanja, toplinska ravnoteža sustava postigla bi se na nižoj temperaturi. Prosječna temperatura pri tlu bi tada iznosila -17°C, a život na Zemlji bi vjerojatno bio nemoguć.

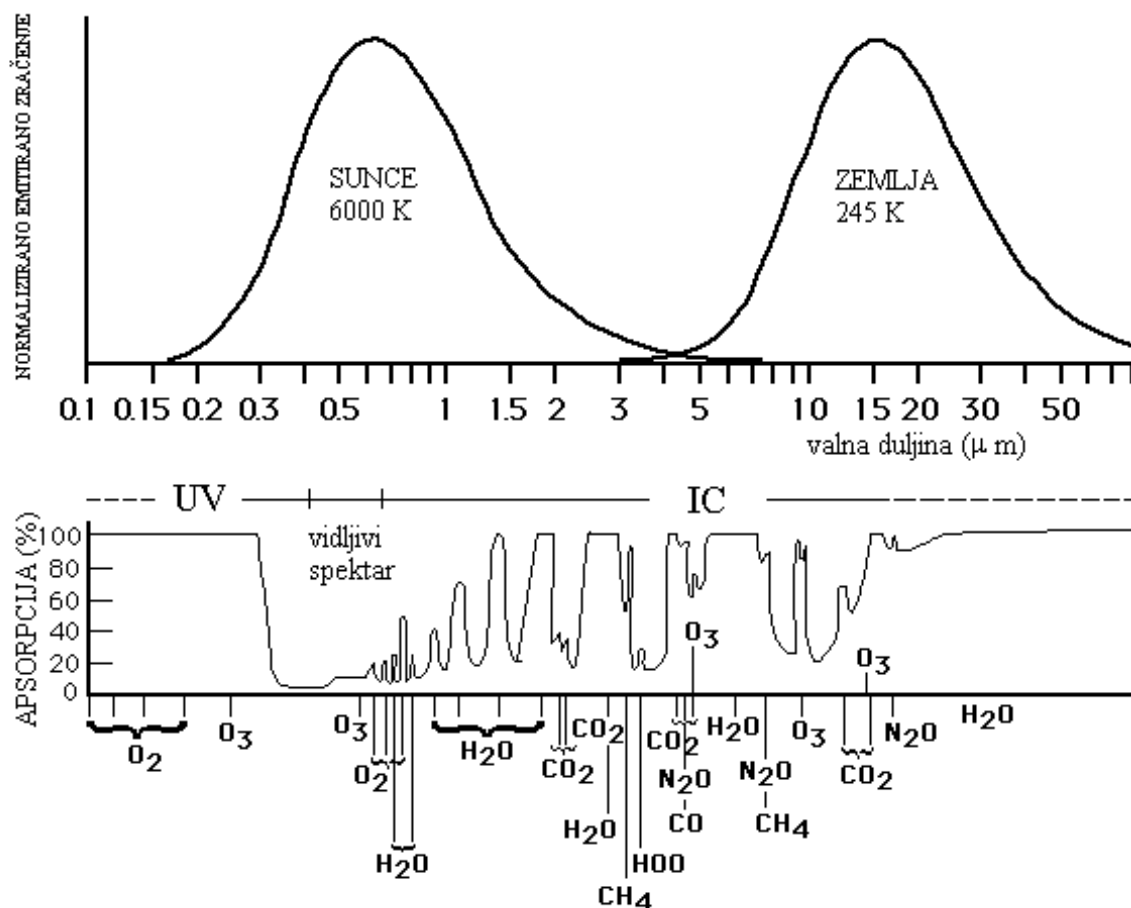
Efekt staklenika, koji bi postojao i bez ljudskog djelovanja, posljednjih desetljeća je pojačan, budući da je antropogena emisija stakleničkih plinova, a naročito CO₂, CH₄, i N₂O, bitno porasla tijekom posljednjih dvjestotinjak godina. Razlog tome je sve veća proizvodnja i upotreba fosilnih goriva, te porast industrijskih, poljoprivrednih i drugih ljudskih aktivnosti. Zbog sve veće količine stakleničkih plinova u atmosferi sve više topline ostaje u sustavu Zemlja-atmosfera, što dovodi do globalnog zatopljenja.

Efekt staklenika postoji i na nekim drugim planetima (vidi Dodatak I). Tako npr. na Veneri, unatoč gustoj naoblaci, koja u svemir reflektira više Sunčevog zračenja nego Zemljina naoblaka, atmosfera veoma efikasno zadržava planetino IC zračenje. Razlog tome je duboka Venerina atmosfera, koja se uglavnom sastoji od CO₂. Stoga srednja temperatura površine Venere iznosi oko 480°C. Za razliku od Venere, Mars ima plitku atmosferu, koja se također sastoji uglavnom od CO₂. Međutim, atmosfera Marsa je toliko plitka, a udaljenost od Sunca toliko velika, da je srednja temperatura površine planete -63°C.

Treba istaknuti da je sam naziv 'efekt staklenika' neprikladan, budući da se mehanizmi u atmosferi i stvarnom stakleniku razlikuju. Zrak u stakleniku ostaje topao zbog toga što staklo propušta Sunčevo zračenje, koje grije tlo u stakleniku, a tlo dalje grije zrak. Istovremeno, staklo mehanički štiti zrak unutar staklenika od miješanja sa hladnijim atmosferskim zrakom. Za razliku od toga u atmosferi se toplina zadržava zahvaljujući radijacijsko-apsorpcijskim svojstvima atmosferskih sastojaka.

Apsorpcijska svojstva atmosferskih sastojaka prikazana su na slici 1.1. zajedno s normaliziranim emitiranim zračenjem Sunca i Zemlje. Iz slike je vidljivo da je zračenje Sunca kratkovalno, dok Zemlja zrači dugovalno. Nadalje, vidi se da atmosfera puno efikasnije apsorbira dugovalno od kratkovalnog zračenja. To drugim riječima znači da se atmosfera najvećim dijelom zagrijava od dugovalnog zračenja tla (te zahvaljujući tome i sama počinje dugovalno protuzračiti), a ne od kratkovalnog zračenja Sunca. Od kratkovalnog Sunčevog zračenja koje dođe na vrh atmosfere, u prosjeku se samo oko 19% apsorbira u atmosferi i oblacima, oko 30% se zbog raspršenja i refleksije gubi u svemir, a preostalih ≈ 51% dolazi do Zemljine površine, te tamo biva apsorbirano. Zemljina površina (koja je apsorbirala 51%

od Sunčevog zračenja na vrhu atmosfere) utroši dalje na vlastito toplinsko zračenje oko dvije petine tako primljene energije. Najveći dio Zemljinog zračenja ($\approx 71\%$) apsorbira se u samoj atmosferi, a preostalih $\approx 29\%$ odlazi u svemir.



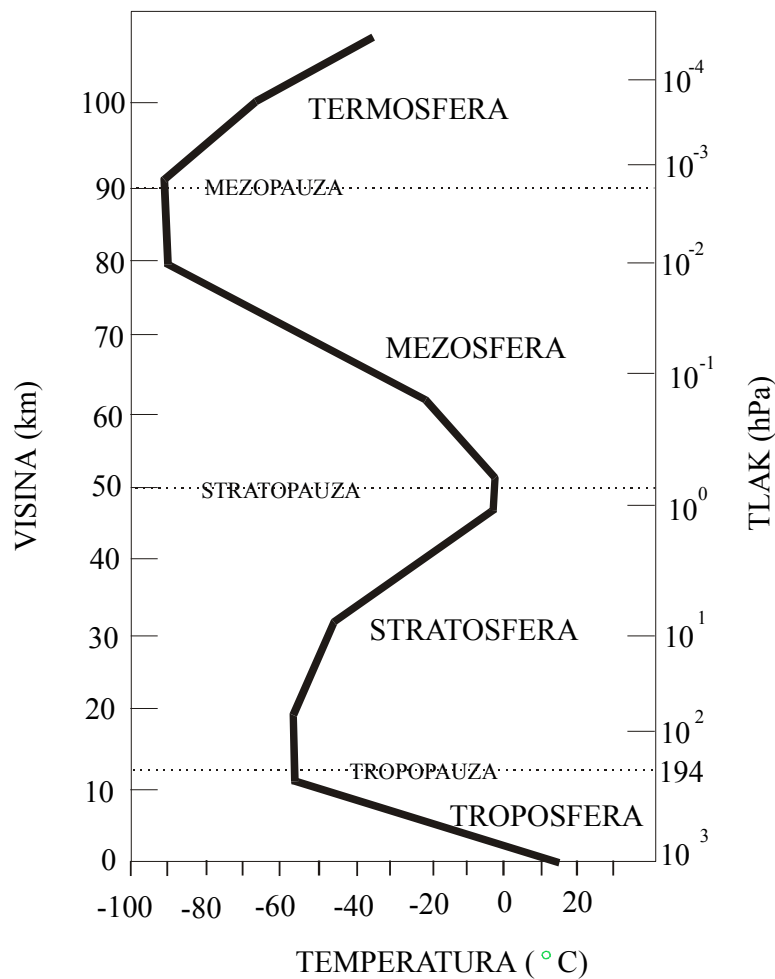
Slika 1.1. Normalizirano emitirano zračenje Sunca pri temperaturi površine od 6000 K i Zemlje pri temperaturi površine od 245 K u ovisnosti o valnoj duljini (gore), te apsorpcijska svojstva atmosferskih sastojaka (dolje) (prema Schneider, 1996).

Za potrebe meteorologije uobičajeno je atmosferu dijeliti u slojeve na temelju promjene temperature visinom (slika 1.2.). Najdonji atmosferski sloj nazivamo **troposfera**. Budući da se troposfera najvećim dijelom zagrijava od Zemljine površine (i to apsorpcijom Zemljinog dugovalnog zračenja, te turbulentnim⁶ dotokom senzitivne i latentne topline⁷ sa Zemljine

⁶ **Turbulentno** strujanje je jako prostorno i vremenski nepravilno i isprekidano (kaotično). U turbulentnom toku dominiraju poremećenja (odstupanja od srednjeg strujanja), te stoga potpuno deformiraju osnovnu struju. Turbulentna gibanja ponašaju se kao slučajni procesi. Suprotno od turbulentnog, **laminarno** strujanje je strujanje fluida koje se događa u paralelnim slojevima, te pri tom nema makroskopskog miješanja fluida iz različitih slojeva. Primjer laminarnog strujanja je tok vode iz slavine pri manjim brzinama. Mlaz vode je tada proziran. Kad slavinu odvrnemo jače, tako da brzina vode postane veća od kritične, tok postaje turbulentan. Voda se zamuti, jer turbulentni vrtlozi u mlaz uvuku i okolni zrak.

⁷ **Senzitivna** (ili senzibilna) toplina je toplina koju uzorak dobije pri promjeni temperature, a da pri tom agregatno stanje uzorka ostane nepromijenjeno. **Latentna** toplina je toplina vezana uz izotermnu promjenu agregatnog stanja. Da bi uzorak prešao iz krutog u tekuće ili tekućeg u plinovito stanje, treba mu dodati energiju (toplina), a za prelazak iz plinovitog u tekuće ili iz tekućeg u kruto stanje, latentna toplina se oslobađa.

površine), temperatura joj naglo opada visinom, u prosjeku oko $0.65^{\circ}\text{C} / 100 \text{ m}$. Stoga je prosječna temperatura na vrhu troposfere približno -60°C .



Slika 1.2. Prosječna promjena temperature visinom u prvih stotinjak km atmosfere.

Premda je troposfera najtanja, u njoj se nalazi oko 80 % mase cijele atmosfere. Nadalje, u troposferi se događaju gotovo svi procesi i pojave koji utječu na vrijeme (poput vremenskih fronti, uragana, oluja, oblaka, nastajanja oborine i drugog), te se u njoj nalazi gotovo sva atmosferska vodena para. Stoga se u okviru dinamičke meteorologije najvećim dijelom proučava upravo taj sloj atmosfere. Troposfera je deblja nad ekvatorijalnim područjem (od 16 do 18 km), dok je nad polarnim područjem tanja (od 7 do 9 km).

Kako se u troposferi hladniji zrak nalazi iznad toplijeg, to dovodi do vertikalnih gibanja i miješanja zraka iz različitih slojeva, budući da troposfera, poput svih sustava u prirodi, teži k postizanju ravnotežnog stanja. Međutim, to ravnotežno stanje, nikad se ne postiže, budući da radijacija Sunca neprestano traje, te na taj način neprestano podržava postojanje vertikalnih temperaturnih gradijenata. Drugim riječima, unatoč vertikalnom miješanju zraka unutar troposfere, razlike u temperaturi duž vertikale, takve da se, gledajući prosječno stanje, hladniji zrak nalazi iznad toplijeg, trajno postoje.

Najdonji dio troposfere naziva se **atmosferski granični sloj**. Atmosferski granični sloj debeo je, ovisno o uvjetima, od nekoliko stotina metara do 3 km, a karakterizira ga izrazita turbulencija. Taj sloj je u direktnom dodiru sa Zemljinom površinom, koja na njega utječe na različite načine: evapotranspiracijom, emisijom onečišćujućih tvari, antropogenom emisijom topline, trenjem, modificiranjem strujanja zbog postojeće topografije i drugim. Atmosferski granični sloj vrlo brzo (na vremenskoj skali ≤ 1 h) reagira na utjecaje Zemljine površine. Ostatak troposfere, koji se naziva **slobodna troposfera**, također reagira na utjecaje Zemljine površine, ali je njegova reakcija, puno sporija (~ 1 dan). U ovom udžbeniku baviti ćemo se uglavnom slobodnom troposferom.

Vrh troposfere naziva se **tropopauza** i u prosjeku se u umjerenim širinama nalazi na visinama od 11 do 12 km nad morskom razinom. Temperatura je u tropopauzi približno konstantna visinom. Tropopauza je najhladnija nad tropima, gdje temperatura može biti i niža od -70°C , dok je najtoplija nad polovima, gdje se katkad izmjeri i -40°C . Tropopauza nije uvijek kontinuirana. Često je u tropima odijeljena, tako da se na širinama oko 30° lomi, a nova tropopauza se formira na manjoj visini. Taj niži dio tropopauze nagnut je prema polu i katkad, protežući se do pola, može imati još jedan diskontinuitet. U blizini diskontinuiteta tropopauze često se nalazi **mlazna struja**. To je usko kvazihorizontalno područje izrazito velikih brzina (katkad i do 500 km h^{-1}), te izrazito velikih vertikalnih brzina (5 do $10 \text{ m s}^{-1}/1 \text{ km}$) i horizontalnih ($5 \text{ m s}^{-1}/100 \text{ km}$) gradijenata brzine, u kojem dolazi do miješanja troposferskog i stratosferskog zraka.

Stratosfera se nalazi iznad tropopauze. Temperatura u stratosferi raste visinom zbog prisustva ozona, koji apsorbira UV zračenje i pri tom je zagrijava. Zagrijavanje je jače u gornjem dijelu stratosfere u kojem ima i više UV zračenja i dovoljno ozona. U skladu s tim temperatura brže raste visinom u gornjem dijelu stratosfere, pa su tamo temperature katkad visoke poput onih pri tlu.

Budući da se u stratosferi topliji zrak nalazi iznad hladnijeg, vertikalna gibanja su prigušena. Time je onemogućeno vertikalno miješanje zraka (izuzev nevelike razmjene s troposferom duž tropopauze). Stoga tvar koja dospije u stratosferu može u njoj ostati jako dugo. Tako npr. čestice koje dospiju u stratosferu prilikom vulkanskih erupcija mogu u njoj ostati nekoliko godina. Vrh stratosfere naziva se **stratopauza**, a nalazi se na visini od oko 50 km nad Zemljinom površinom. U stratopauzi je temperatura približno konstantna visinom.

Iznad stratopauze nalazi se svega oko 0.1 % mase atmosfere. Od toga se oko 99 % mase nalazi u **mezosferi**, koja se proteže na visinama od oko 50 do oko 80 km nad tlom. U mezosferi, koja se još naziva i srednja atmosfera, ima vrlo malo ozona, kisika i dušika, koji bi mogli u znatnijoj količini apsorbirati Sunčevo zračenje. Stoga temperatura opada visinom, budući da mezosfera gubi toplinu zračenjem, prvenstveno ugljikovog dioksida. Sastojci u gornjem dijelu mezosfere u velikoj mjeri su ionizirani. Na vrhu mezosfere, koji nazivamo **mezopauza**, temperatura opada i do -90°C . Duž mezopauze, koja se nalazi na visinama od oko 85 do 90 km, temperatura je konstantna visinom.

Iznad mezopauze nalazi se **termosfera**, koja je s obzirom na kemijski sastav heterosfera. U tom sloju temperatura opet počinje rasti visinom. Temperatura u termosferi raste zbog toga što plinovi u njoj potpuno apsorbiraju Sunčevo UV zračenje vrlo kratkih valnih duljina. Nadalje, u termosferi se nalazi mnogo ioniziranih atoma i molekula, pa taj dio atmosfere zajedno s gornjim dijelom mezosfere čini ionosferu.

U termosferi nad polarnim područjem katkad dolazi do fascinantne optičke pojave poznate pod imenom aurora. Do pojave dolazi zbog toga što atomski kisik, molekule dušika i drugi sastojci termosfere, nakon sudara s vrlo brzim elektronima Sunčevog vjetra, emitiraju svjetlost. Najčešće se može vidjeti zelenkasto-bijelo svjetlo koje emitiraju atomi kisika, dok se rjeđe vide roskasta i plavkasta svjetlost, koje emitiraju neutralne molekule, odnosno ionizirane molekule dušika.

Vrh termosfere, **termopauza**, nije dobro definiran. Procjenjuje se da se nalazi na visinama između 500 i 1000 km, te da se jako mijenja u ovisnosti o Sunčevom zračenju. Temperatura u termopauzi također nije dobro definirana, a prema nekim studijama, katkad je veća i od 2000°C.

1.1.2. Zbog čega nastaju strujanja u atmosferi

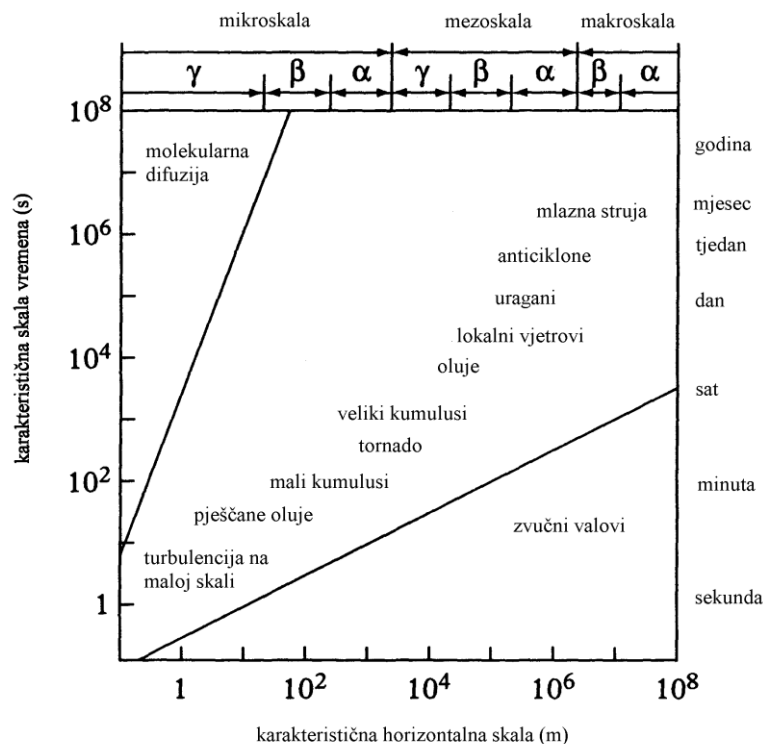
U prethodnom poglavlju objasnili smo kako se i zašto temperatura u prosjeku mijenja visinom. To drugim riječima znači da u atmosferi postoji **vertikalni temperaturni gradijent** $\gamma = -\partial T / \partial z$, gdje je T temperatura, a z vertikalna koordinata. Vertikalni temperaturni gradijent je posljedica neprekidnog Sunčevog zračenja, te radijacijsko-apsorpcijskih svojstava sustava Zemlja-atmosfera. Kako se radijacijsko-apsorpcijska svojstva atmosfere mijenjaju visinom (pojedini slojevi razlikuju se i po kemijskom sastavu i po količini pojedinih sastojaka), te kako je na različitim visinama dostupna količina Sunčevog i Zemljinog zračenja različita, to se i prosječni temperaturni vertikalni gradijent razlikuje od sloja do sloja.

Zrak pri različitoj temperaturi ima različitu gustoću. Što je topliji, gustoća mu je manja i suprotno, što je hladniji, gustoća mu je veća. Ako je vertikalni temperaturni gradijent u atmosferi takav da temperatura zraka opada visinom ($\gamma > 0$), što znači da se hladniji (gušći) zrak nalazi iznad toplijeg (rjeđeg), doći će do uzlaznog gibanja koje nazivamo **konvekcija**. Konvekcijom se topliji (rjeđi, te stoga lakši) zrak prenosi u vis, a na njegovo mjesto se spušta hladniji i zrak. Atmosfera na taj način želi postići ravnotežno stanje. Drugim riječima, konvekcija, koja se pojavljuje zbog postojanja vertikalnih temperaturnih gradijenata, sama nastoji dokinuti svoj uzrok – vertikalne temperaturne gradijente. Kao što je prikazano na slici 1.2, u troposferi temperatura opada visinom, stoga je u tom sloju atmosfere pojava konvekcije česta. U atmosferi se osim konvekcije javlja i silazno gibanje zraka koje nazivamo **subsidenција**.

Poput vertikalnih, u atmosferi postoje i **horizontalni gradijenti temperature**. Oni su posljedica **diferencijalnog zagrijavanja** Zemljine površine. Diferencijalno zagrijavanje postoji stoga što količina Sunčevog zračenja apsorbiranog na Zemljinoj površini opada s porastom geografske širine pa ekvatorijalna područja apsorbiraju najviše, a polarna najmanje Sunčevog zračenja. Dodatno, na diferencijalno zagrijavanje (a time i na postojanje horizontalnih gradijenata temperature) utječu i razlike u radijacijsko-apsorpcijskim svojstvima kopna i mora, te razlike u radijacijsko-apsorpcijskim svojstvima različitih vrsta tla. Horizontalni gradijenti temperature uzrokovati će horizontalne gradijente gustoće zraka. Atmosfera i ovdje želi postići ravnotežno stanje, odnosno dokinuti gradijente gustoće, pa će zrak horizontalno strujati iz područja veće gustoće u područje manje gustoće. Horizontalno strujanje zraka (strujanje koje je paralelno sa Zemljinom površinom) vrlo često se naziva **vjetar** (npr. u klimatologiji). Međutim, strujanja u atmosferi posljedica su postojanja i horizontalnih i vertikalnih gradijenata temperature, te su stoga trodimenzionalna. U dinamičkoj meteorologiji pod vjetrom podrazumijevamo trodimenzionalno strujanje.

1.1.3. Skale atmosferskih strujanja

Atmosferske pojave i strujanja javljaju se u veoma širokom rasponu, kako s obzirom na prostor koji zauzimaju, tako i s obzirom na vrijeme njihovog trajanja. Pod prostornom skalom pojedinog fenomena podrazumijevamo njegovu tipičnu veličinu ili valnu duljinu. Slično, vremenska skala predstavlja tipično trajanje ili period promatrane pojave. Atmosferske pojave javljaju se u kontinuitetu, od sasvim malih (~ 1 m), kratkotrajnih (~ 1 s) turbulentnih vrtloga, pa do mlazne struje čija je prostorna skala nekoliko tisuća kilometara, a vremenska nekoliko mjeseci. Zbog prostorno-vremenske kontinuiranosti pojava, ne postoje strogo definirane granice koje odjeljuju pojedine skale tipične za dvije različite pojave. Ipak, za definiranje skala različitih procesa općeprihvaćena je klasifikacija Orlanskog (1975), koja je prikazana na slici 1.3.



Slika 1.3. Karakteristične horizontalne i vremenske skale pojedinih atmosferskih pojava i strujanja na temelju klasifikacije Orlanskog iz 1975. godine (prema Schneider, 1996).

Prema klasifikaciji Orlanskog, atmosferske pojave i strujanja dijele se na temelju horizontalnog protezanja u tri osnovne skale. Pod **makroskalnim** pojavama podrazumijevamo sve one čije su tipične skale veće od 2000 km. Unutar makroskale razlikujemo dalje makro- α skalu (u koju spadaju fenomeni horizontalnog rasprostiranja većeg od 10 000 km) i makro- β skalu (koja obuhvaća pojave horizontalnih dimenzija od 2 000 do 10 000 km). **Mezoskalne** pojave razmjera su između 2 km i 2 000 km, gdje se mezo- α pojave javljaju u rasponu od 200 km do 2 000 km, mezo- β pojave u rasponu od 20 km do 200 km, a mezo- γ u rasponu od 2 do 20 km. **Mikroskala** obuhvaća sve pojave tipičnih skala manjih od 2 km, a dijeli se dalje na mikro- α skalu (200 m – 2 km), mikro- β skalu (20 m – 200 m) i mikro- γ skalu (koja uključuje sve pojave horizontalnih dimenzija manjih od 20 m).

Klasifikacija pojava u odnosu na vremenske skale nije jednoznačna i rijeđe se koristi. Međutim, pod makroskalnim pojavama s obzirom na njihovo trajanje najčešće podrazumijevamo one koje traju nekoliko dana ili dulje, a pod mikroskalnim one reda veličine od nekoliko minuta. Mezo- α skala prema prema klasifikaciji Orlanskog odgovara vremenskim skalama od jednog dana do jednog tjedna, mezo- β skala pojavama i strujanjima koja traju od nekoliko sati do jednog dana, a mezo- γ skala onima koje traju od pola sata pa do nekoliko sati. Horizontalne skale, vremenske skale te pripadne skale prema klasifikaciji Orlanskog za neke od atmosferskih pojava prikazane su u tablici 1.2.

Tablica 1.2. Neke od atmosferskih pojava, te pripadne skale.

Pojava	Horizontalna skala	Vremenska skala	Skala prema klasifikaciji Orlanskog (1975)
plima i oseka			makro- α
baroklini valovi			makro- β
frontalni sustavi, uragani	200 km – 2 000 km	1 dan – 1 tjedan	mezo- α
noćna mlazna struja, linije maha, inercijalni valovi, oblačni klasteri, cirkulacija obronka i obalna cirkulacija, te druge termalno uvjetovane cirkulacije	20 km – 200 km	nekoliko sati – 1 dan	mezo- β
oluje, interni težinski valovi, turbulencija u čistom zraku, urbani efekti			mezo- γ
snažna konvekcija, Cb, tornado	~ 1 km		mikro- α
termici, pješćane oluje, zapusi			mikro- β
dimne perjanice mali i sitni urbulentni vrtlozi, srednji slobodni put molekula			mikro- γ

Pod pojmom **sinoptička** skala obično podrazumijevamo karakterističnu skalu sinoptičkih sustava umjerenih širina (ciklona i anticiklona), koje prikazujemo na vremenskim

kartama. Kao što ćemo kasnije pokazati, ti sinoptički sustavi ustvari su poremećenja u polju tlaka, odnosno geopotencijala, a horizontalne dimenzije su im reda veličine 1 000 km.

U teorijskim analizama, kao i u atmosferskom modeliranju uobičajeno je u jednadžbama koje opisuju promatrane procese ili pojave analizirati skale pojedinačnih članova koji čine jednadžbu. Na taj način stičemo uvid u to koliko pojedini član (odnosno pojedini fizikalni mehanizam ili proces) doprinosi jednadžbi u cjelini (odnosno procjenjujemo koji je mehanizam ili proces važniji ili manje važan). Taj postupak naziva se **analiza skala** i biti će ilustriran na primjeru jednadžbe gibanja na sinoptičkoj skali u poglavlju 2.3. Nakon provedene analize skala članovi čiji su redovi veličina bitno manji od redova veličina preostalih članova, izbacuju se iz jednadžbe. Time se postižu dva cilja. Kao prvo, jednadžba se pojednostavnjuje (čime se olakšava i njeno rješavanje). Nadalje, iz rješavanja se eliminiraju (filtriraju) doprinosi koji su posljedica procesa nebitnih za promatrani problem, te stoga u promatranom slučaju u rješenju predstavljaju šum ili smetnju.

U analizi skala uobičajeno je karakteristične skale varijabli promatranog fluida (atmosfere, oceana ili nekog drugog fluida) označiti ovako:

U	skala horizontalne brzine ($m s^{-1}$);
W	skala vertikalne brzine ($m s^{-1}$);
L	skala duljine [\sim (valna duljina)/(2π)] (m);
H	skala visine (dubine) (m);
$\delta P / \rho$	skala horizontalnih fluktuacija tlaka ($m^2 s^{-2}$);
L/U	horizontalna skala vremena (s);
H/W	vertikalna skala vremena (s).

Horizontalne fluktuacije tlaka δP dijelimo s gustoćom ρ tako da bi dobili procjenu skale koja vrijedi na svim visinama u troposferi. Skala horizontalnih fluktuacija skala $\delta P/\rho$ ima jedinice geopotencijala, o kojem će biti riječi u idućim poglavljima.

1.2 Fundamentalne sile

Gibanja u atmosferi podvrgnuta su fundamentalnim fizikalnim zakonima sačuvanja mase impulsa i energije. Newtonov drugi zakon gibanja jedan je od najvažnijih fundamentalnih fizikalnih zakona, a vrijedi u inercijalnom⁸ koordinatnom sustavu. Prema tom zakonu promjena impulsa tijela u vremenu jednaka je sumi svih sila koje djeluju na tijelo

$$\frac{d(m\mathbf{v})}{dt} = m\mathbf{a} = \sum_i \mathbf{F}_i, \quad (1.2.1)$$

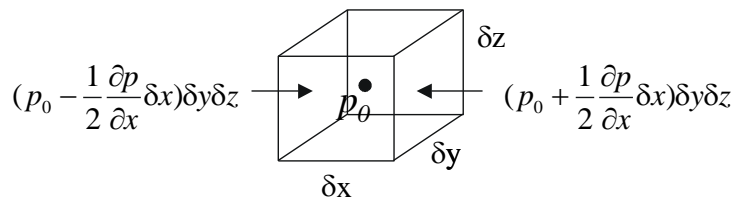
gdje je m masa, $m\mathbf{v}$ je impuls, \mathbf{a} je akceleracija, a $\sum_i \mathbf{F}_i$ je resultantna svih sila koja djeluje na tijelo. Na tijelo u atmosferi djeluju **sila gradijenta tlaka**, **gravitacija** i **sila trenja**. (Iste sile djeluju i na tijela u oceanu).

⁸ Inercijalni koordinatni sustav je onaj koji nije akceleriran (dakle miruje ili se giba jednoliko po pravcu).

1.2.1. Sila gradijenta tlaka

Promatramo infinitezimalni element volumena fluida $\delta V = \delta x \delta y \delta z$ (slika 1.4) čije središte se nalazi u točki (x_0, y_0, z_0) . Zbog neprestanog slučajnog gibanja molekula fluida na plohe volumena neprestano djeluje impuls od okolnog fluida. Okolni fluid tlači dakle plohe tlakom koji je jednak impulsu po jedinici površine u jedinici vremena. Ako je tlak u središtu elementa p_0 , tada tlak koji djeluje na lijevu plohu (p_L) možemo prikazati razvojem u Taylorov red⁹ oko točke (x_0, y_0, z_0) , gdje ćemo zanemarivo male članove višeg reda izostaviti. Dobivamo $p_L \approx p_0 - (\partial p / \partial x) \delta x / 2$. Slično, na desnu plohu djeluje tlak $p_D \approx p_0 + (\partial p / \partial x) \delta x / 2$. Odatle je ukupna sila tlaka koja u x - smjeru djeluje na element volumena $F_{px} = (p_L - p_D) \delta y \delta z = -(\partial p / \partial x) \delta x \delta y \delta z = -(\partial p / \partial x) \delta V$. Analogno se dobiju i neto sile u y i z smjeru $F_{py} = -(\partial p / \partial y) \delta V$ i $F_{pz} = -(\partial p / \partial z) \delta V$, pa rezultatnu silu tlaka možemo pisati ovako $\vec{F}_p = -\nabla p \delta V$. Uočavamo da je sila tlaka koja djeluje na element volumena fluida proporcionalna gradijentu tlaka, a ne magnitudi tlaka. Stoga je i zovemo sila gradijenta tlaka. Akceleraciju sile gradijenta tlaka dobivamo tako da silu podijelimo s masom elementa $m = \rho \delta V$, gdje je ρ gustoća fluida, a α je specifični volumen ($\alpha = 1 / \rho$)

$$\mathbf{a}_p = \frac{\mathbf{F}_p}{m} = -\frac{1}{\rho} \nabla p = -\alpha \nabla p. \quad (1.2.2)$$



Slika 1.4. Ilustracija x – komponente sile gradijenta tlaka.

1.2.2. Gravitacija

Newtonov univerzalni zakon gravitacije kaže da se dvije mase međusobno privlače silom koja je proporcionalna njihovim masama i obrnuto proporcionalna kvadratu udaljenosti među masama. Ako je jedna od masa masa Zemlje M_Z ($M_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg), a druga masa elementa fluida m (slika 1.5), tada je gravitacijska sila \mathbf{F}_g

$$\mathbf{F}_g = -\frac{GM_Z m}{r^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right), \quad (1.2.3)$$

⁹ Taylorov red oko točke a : $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)(x-a)^2 / 2! + \dots + f^{(n)}(x-a)^n / n!$

gdje je G gravitacijska konstanta $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$, a \vec{r} je vektor udaljenosti centara masa. Predznak '-' u jednadžbi (1.2.3) ukazuje na to da je gravitaciona sila privlačna. Stoga masa elementa fluida m u Zemljinom gravitacijskom polju ima akceleraciju \vec{g}^*

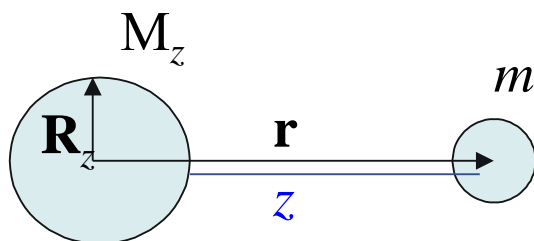
$$\mathbf{g}^* = \frac{\mathbf{F}_g}{m} = -\frac{GM_z}{r^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right). \quad (1.2.4)$$

Udaljenost centara masa r možemo prikazati kao sumu srednjeg radijusa Zemlje R_z ($R_z = 6371 \text{ km}$) i vertikalne koordinate z , pa jednadžbu (1.2.4) možemo pisati ovako

$$\mathbf{g}^* = -\frac{GM_z}{(R_z + z)^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = -\frac{GM_z}{R_z^2 \left(1 + \frac{z}{R_z} \right)^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \mathbf{g}_0^* \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R_z} \right)^2} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right). \quad (1.2.5)$$

gdje je $\mathbf{g}_0^* = -\frac{GM_z}{R_z^2}$ gravitacijska akceleracija na srednjoj razini mora. Budući da visina atmosfere ne prelazi 1000 km , a visina troposfere (u kojoj se događa glavna meteoroloških procesa) je $\leq 20 \text{ km}$, to je za atmosferu $z \ll R_z$. Drugim riječima, za većinu meteoroloških pojava i procesa možemo pretpostaviti da se atmosfera ponaša kao plitak fluid. Odatle slijedi

$$\mathbf{g}^* \approx \mathbf{g}_0^* \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) = \textit{konst.} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right). \quad (1.2.6)$$



Slika 1.5. Masa Zemlje M_z i masa elementa fluida m . \mathbf{R}_z je vektor srednjeg radijusa Zemlje, \mathbf{r} je vektor udaljenosti centara masa, a z je vertikalna koordinata.

1.2.3. Sila trenja

Trenje postoji u svakom realnom fluidu. Trenje u atmosferi utječe na vrijeme i klimu tako da usporava strujanje i zakreće vektor vjetera. U atmosferi je najvažnije je u prvih $\approx 1 \text{ km}$, a u oceanu u gornjih 50-ak m oceana (gdje uzrokuje površinske struje). Pod pojmom trenja podrazumijevamo bilo koji od više fizikalnih procesa koji mijenjaju brzinu (odnosno impuls) fluida. Ti procesi uključuju prijenos impulsa u viskoznom fluidu, tokove preko prepreka, valna gibanja, te naročito kompliciran i širok spektar kaotične turbulencije. Da bi matematički

prikazali (parametrizirali) silu trenja, moramo najprije objasniti dva pojma, a to su '**potezanje**' (eng. *drag*) i **napetost**.

Trenje se općenito opire relativnom gibanju fluida. Tako npr., ako zrak struji preko čvrste prepreke (planine), trenje će se opirati strujanju. (Ovaj uobičajeni koncept 'potezanja' katkad se pogrešno primijenjuje i na slojeve fluida koji nisu u direktnom kontaktu sa čvrstom preprekom.) Efekt potezanja prepreke, tzv. tlak potezanja, nastaje zbog razlika u tlaku duž prepreke, budući da je u navjetrini prepreke tlak veći nego u zavjetrini. Potezanje, kojim prepreka djeluje na strujanje, suprotnog je smjera od samog strujanja. Budući da prepreka 'poteže' vjetar u smjeru suprotnom od smjera vjetra, to onda zbog trećeg Newtonovog zakona gibanja¹⁰ mora vjetar 'potezati' prepreku u smjeru koji je isti kao i smjer vjetra. Sila kojom vjetar 'poteže' prepreku proporcionalna je CV^2 , gdje je C koeficijent potezanja, a V je modul brzine vjetra. Princip akcije i reakcije ukazuje na to da dva tijela mogu međusobno razmijenjivati impuls tako da, gledajući oba tijela kao jedinstveni sustav, impuls sustava ostaje sačuvan.

Potezanja prepreke (koje je suprotnog smjera od strujanja) i silu reakcije (koja je istog smjera kao i strujanje) možemo ilustrirati npr. drvetom koje se savilo zbog zapuha vjetra. Drvo se savilo zbog sile trenja zraka (sile reakcije), koja je suprotnog smjera od sile trenja kojom prepreka djeluje na zrak. Slično, oborinski elementi (kristali leda i kapljice kiše) gibaju se relativno prema dolje u odnosu na okoliš zbog sile teže (koja je opisana u idućem poglavlju), te tako na njih djeluje sila potezanja prema gore (reakcija zraka). Zato mora postojati sila prema dolje kojom oborinski elementi djeluju na zrak. Na taj način snažna oborina u oluji sama umanjuje uzlazne struje, a pojačava silazne struje, koje mogu uzrokovati štete na Zemljinoj površini.

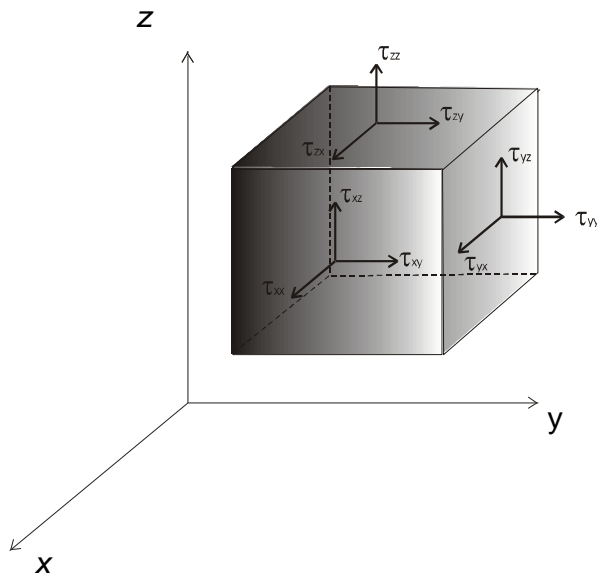
Do sad smo promatrali otpor kojim se strujanje odupire prepreci. Međutim, da bi objasnili trenje, koje u fluidu postoji i na velikim udaljenostima od prepreka, kao npr. na različitim visinama u atmosferi, uvesti ćemo pojam tangencijalne napetosti. Tangencijalna napetost je sila po jedinici površine, koja je analogna sili između dva vertikalno učvršćena kruta tijela, koja se horizontalno gibaju različitim brzinama. Sile koje djeluju na oba tijela, odupiru se relativnom gibanju, akcelerirajući sporije i usporavajući brže tijelo. Na taj način napetost djeluje tako da prenosi impuls duž ploha koje su okomite na smjer gibanja. Slično, kod fluida čiji se slojevi gibaju različitim brzinama, dolazi zbog postojanja tangencijalne napetosti do razmjene impulsa.

Napetost je tenzor drugog reda (vidi sliku 1.6), te stoga ima 9 komponenti, a može se pisati u matričnom obliku

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix}, \quad (1.2.7)$$

gdje su τ_{xx} , τ_{yy} i τ_{zz} su komponente tlaka u x , y i z smjeru, a preostalih 6 komponenti su tangencijalne napetosti.

¹⁰ Newtonov treći zakon ili princip akcije i reakcije kaže da za svaku akciju (silu) u prirodi postoji reakcija jednakog iznosa i suprotnog smjera.



Slika 1.6. Ilustracija tenzora napetosti τ koji djeluje na plohe elementa volumena fluida. Zbog preglednosti slike prikazane su samo komponente napetosti koje djeluju na tri osjenčane plohe. Prvi indeks (i) u komponenti napetosti τ_{ij} pokazuje na koju os je okomita promatrana ploha, a drugi indeks (j) pokazuje u kojem smjeru djeluje napetost na promatranu plohu. Tangencijalne napetosti su one za koje je $i \neq j$, a τ_{xx} , τ_{yy} i τ_{zz} su komponente tlaka u x , y i z smjeru.

Tangencijalnu napetost duž granice sloja fluida uzrokuju **viskoznost, turbulencija i valovi**. Sva tri uzroka tangencijalne napetosti u sebi uključuju procese čije su skale vrlo male u odnosu na dimenzije sloja fluida. Molekularna viskoznost je unutarne trenje kojim se realni fluid odupire gibanju. U slučaju atmosfere viskoznost je mjera efikasnosti kojom pojedini slojevi zraka razmjenjuju impuls. Do razmjene impulsa dolazi naglim, gotovo slučajnim molekularnim gibanjima, a rezultat toga je 'izmiješanost' odnosno smanjivanje razlika u impulsu koje postoji među slojevima. Drugim riječima, zbog razmjene impulsa brži slojevi se usporavaju, a sporiji ubrzavaju. Molekularna viskoznost važna je samo u prvih nekoliko milimetara uz Zemljinu površinu, te u tankom sloju oko oborinskih elemenata (kapljica i kristala) unutar oblaka. Stoga je u većini problema vezanih uz dinamičku meteorologiju najčešće zanemarujemo.

Turbulencija je najvažniji izvor napetosti trenja. Kod turbulencije miješanje postoji zbog kaotičnih turbulentnih vrtloga, koji se javljaju u širokom rasponu skala. Vrtlozi nastaju u srednjem toku i bivaju njime prenošeni s jednog mjesta na drugo. Turbulencija postoji i u atmosferi i u oceanu. Zbog turbulentnih vrtloga individualne česti fluida slučajno se gibaju i prema gore i prema dolje. (Istovremeno, česti fluida gibaju se i u smjeru srednjeg strujanja.) Stoga različiti slojevi međusobno razmjenjuju česti. Ako u toku postoji vertikalno smicanje (promjena brzine visinom), tada česti koje potječu iz različitih slojeva imaju različite impulse. Stoga se zbog slučajne razmjene česti razmjenjuje i impuls. Ovaj proces je analogan razmjeni impulsa pri viskoznoj napetosti, ali je kod turbulentne napetosti tipični pomak česti, koji

nazivamo **duljina miješanja** (eng. *mixing length*), puno veći od pomaka molekula zbog viskoznosti.

Turbulentna napetost u sloju trenja (u atmosferi to je atmosferski granični sloj, vidi poglavlje 1.1.1) vrlo često se aproksimira izrazom

$$\tau = \rho K \partial u / \partial z, \quad (1.2.8)$$

gdje je τ napetost, $\partial u / \partial z$ je smicanje, u je brzina, z je visina, a ρ gustoća fluida. Koeficijent K naziva se vrtložna ili turbulentna viskoznost (eng. *eddy viscosity*) i općenito ovisi o strujanju, te ima veće vrijednosti pri većem smicanju brzine. Takav pristup tretiranju turbulencije naziva se K -teorija. K -teorija je zadovoljavajuća aproksimacija ako turbulencija nastaje zbog smicanja. Međutim, ako se turbulencija javi kao posljedica konvekcije (uzgona), jednačbe poput (1.2.8) ne mogu se primijeniti.

Teorija turbulencije jedan je od najkompliciranijih, a istovremeno veoma važnih problema u proučavanju strujanja u fluidu, te zahtijeva veliko predznanje iz dinamike fluida. U ovoj knjizi, čija je namjera da čitatelja upozna s osnovama dinamičke meteorologije, nećemo se baviti turbulencijom, već samo navodimo najosnovnije informacije. O turbulenciji se više može saznati iz literature koja se bavi graničnim slojem (vidi npr. Stull, 1988 ili Kundu, 1990).

Impuls se može vertikalno razmijenjivati i pomoću internih težinskih valova (eng. *internal gravity waves*). Interni težinski valovi su vertikalne oscilacije koje nastaju u statički stabilnom fluidu (statička stabilnost opisana je u 5. poglavlju), a mogu se propagirati i horizontalno i vertikalno. Faza im ovisi o udaljenosti od podloge. Napetost valova može se u atmosferi propagirati i do tropopauze.

Da bi na element volumena fluida, poput onog prikazanog na sl. 1.6., djelovala neto sila trenja u horizontalnom smjeru, mora postojati razlika u napetosti duž vertikale. Stoga se kod proučavanja graničnog sloja atmosfere i oceana horizontalna komponenta akceleracije zbog sile trenja često prikazuje u obliku

$$a_{tr} = \rho^{-1} \partial \tau / \partial z, \quad (1.2.9)$$

gdje je τ napetost, ρ je gustoća fluida, a z vertikalna koordinata.

Posljedice jednačbe (1.2.9) možemo ilustrirati primjerom u kojem zrak brzo struji nad oceanom. Postavimo x – os u smjeru strujanja zraka, tako da brzina zraka ima samo x -komponentu koju ćemo označiti s u , takvu da je $u > 0$. Relativno gibanje zraka u odnosu na vodu je takvo da je površinska napetost vjetra pozitivna $\tau_0 > 0$. Napetost opada s udaljenošću od dodirne plohe atmosfera-ocean i u atmosferi i u oceanu. Stoga iz jednačbe (1.2.9) slijedi da sila trenja u atmosferi ima negativan smjer (budući je $\partial \tau / \partial z < 0$), a u oceanu pozitivan ($\partial \tau / \partial z > 0$). Drugim riječima, to znači da se trenje istovremeno odupire vjetru i podržava struje u oceanu, koje su istog smjera kao i smjer vjetra.

Budući da je u opisanom primjeru površinska napetost τ_0 jednaka toku horizontalnog impulsa, koji je usmjeren od zraka prema oceanu, impuls koji atmosfera gubi je dobitak impulsa za ocean. Stoga su u ovom primjeru i sile trenja u atmosferi i oceanu suprotnog smjera. U našem primjeru τ_0 možemo odrediti iz

$$\tau_0 = \rho_a C_D u^2, \quad (1.2.10)$$

gdje je ρ_a gustoća zraka, u je brzina zraka (koja je u ovom slučaju u pozitivnom smjeru), a C_D je koeficijent potezanja. Uočavamo da jednadžba (1.2.10) podsjeća na već prije spomenutu silu kojom vjetar poteže prepreku, a koja je proporcionalna CV^2 .

Izraz za akceleraciju zbog sile trenja (1.2.9) može se poopćiti na trodimenzionalni slučaj u kojem tenzor napetosti τ ima 9 komponenti, kao što je prikazano jednadžbom (1.2.7). Akceleracija sile trenja tada je vektor s komponentama $(a_{tr})_x$, $(a_{tr})_y$ i $(a_{tr})_z$ u x , y i z smjeru

$$\begin{aligned} (a_{tr})_x &= \rho^{-1} (\partial \tau_{xx} / \partial x + \partial \tau_{yx} / \partial y + \partial \tau_{zx} / \partial z) \\ (a_{tr})_y &= \rho^{-1} (\partial \tau_{xy} / \partial x + \partial \tau_{yy} / \partial y + \partial \tau_{zy} / \partial z) \\ (a_{tr})_z &= \rho^{-1} (\partial \tau_{xz} / \partial x + \partial \tau_{yz} / \partial y + \partial \tau_{zz} / \partial z). \end{aligned} \quad (1.2.11)$$

U slučaju molekularne viskoznosti uobičajeno je pretpostaviti da se fluid ponaša poput **Newtonovog fluida**, odnosno da je viskozna napetost potezanja proporcionalna smicanju. Pokazalo se da ta aproksimacija u većini slučajeva iznenađujuće dobro opisuje ponašanje zraka i vode¹¹. Tada je $\tau_{ij} = \mu \partial u_j / \partial x_i$, gdje je μ koeficijent dinamičke viskoznosti ($\text{kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$). Koeficijent dinamičke viskoznosti neznatno se mijenja temperaturom, pa se najčešće koristi konstantna vrijednost $\mu = 1.8 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$ (za atmosferu) i $\mu = 1.8 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-1}\text{s}^{-1}$ (za vodu). Fluid za koji je $\mu = 0$ zove se **idealni fluid** i u njemu nema molekularne viskoznosti.

Uvrstimo komponente tenzora napetosti za Newtonov fluid u jednadžbu (1.2.11). Tako npr. za x – komponentu akceleracije dobivamo

$$\begin{aligned} (a_{tr})_x &= \rho^{-1} (\partial \tau_{xx} / \partial x + \partial \tau_{yx} / \partial y + \partial \tau_{zx} / \partial z) = \rho^{-1} (\mu \partial^2 u / \partial x^2 + \mu \partial^2 u / \partial y^2 + \mu \partial^2 u / \partial z^2) = \\ &= \mu \rho^{-1} \nabla^2 u. \end{aligned}$$

Analogno dobivamo za y i z smjer: $(a_{tr})_y = \mu \rho^{-1} \nabla^2 v$ i $(a_{tr})_z = \mu \rho^{-1} \nabla^2 w$. Dakle, za Newtonov fluid akceleracija zbog molekularnog trenja može se pisati vektorski

$$\mathbf{a}_{tr} = \mu \rho^{-1} \nabla^2 \mathbf{v} = \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (1.2.12)$$

gdje je \mathbf{v} vektor brzine fluida s komponentama u , v i w , a koeficijent $\nu = \mu \rho^{-1}$ je koeficijent kinematičke viskoznosti ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$).

Zemljina površina približno je horizontalna. Stoga su najizraženiji efekti trenja oni, koji postoje zbog prijenosa molekularnog impulsa duž vertikale, budući da je on puno je veći od prijenosa impulsa duž horizontale. Posljedica toga su vertikalne varijacije vjetra, koje su puno veće od horizontalnih varijacija. Uzmemo li u obzir efekte molekularnog trenja, koji postoje samo zbog prijenosa impulsa duž vertikale, jednadžba (1.2.12) se pojednostavnjuje

¹¹ Za razliku od toga, neke tekućine, koje su važne u kemijskoj industriji, ne mogu se smatrati Newtonovim fluidima, već im je napetost nelinearna funkcija smicanja. To su npr. (1) otopine koje sadrže molekule polimera velikih molekularnih masa; (2) emulzije i suspenzije koje sadrže suspendirane čestice (npr. krv ili voda koja u sebi sadrži glinu).

$$\mathbf{a}_{tr} = \nu \partial^2 \mathbf{v} / \partial z^2. \quad (1.2.13)$$

Želimo li u Newtonovom drugom zakonu gibanja (jednadžba 1.2.1.) uvažiti turbulentno trenje, poslužiti ćemo se Prandtlovom relacijom koja je izvedena po analogiji na molekularno trenje, a uvažava prijenos impulsa turbulentnim vrtlozima samo duž vertikale

$$\mathbf{a}_{tr} = \mu_e \rho^{-1} \partial^2 \bar{\mathbf{v}} / \partial z^2, \quad (1.2.14)$$

gdje je $\bar{\mathbf{v}}$ vremenski srednjak vektora brzine, a μ_e je koeficijent vrtložne (ili turbulentne) viskoznosti (eng. *eddy coefficient of viscosity*, ili *eddy exchange coefficient*, ili *Austausch coefficient*, ili *eddy coefficient of turbulent viscosity*). Koeficijent turbulentne viskoznosti μ_e nije jednostavan poput koeficijenta dinamičke viskoznosti μ , koji ovisi samo o temperaturi. Za razliku od μ , koeficijent turbulentne viskoznosti μ_e ovisi i o vertikalnom temperaturnom gradijentu, te o hrapavosti podloge i varijacijama gustoće.

Vremenski srednjak vektora brzine $\bar{\mathbf{v}}$ je takav da je brzina \mathbf{v} u svakom trenutku jednaka srednjoj brzini uvećanoj za turbulentno poremećenje \mathbf{v}' ($\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}'$). Slično se kod proučavanja turbulencije prikazuju i druge meteorološke varijable. Tako npr. proizvoljnu varijablu a rastavljamo na prostorni ili vremenski srednjak \bar{a} i na turbulentno poremećenje a'

$$a = \bar{a} + a', \quad (1.2.15)$$

gdje srednja vrijednost \bar{a} opisuje varijablu na promatranoj prostorno-vremenskoj skali, a turbulentno poremećenje opisuje utjecaje prostorno-vremenskih skala koje su manje od promatrane skale, i stoga često, zbog svojih malih dimenzija, nemjerljive. Pri tom je srednja vrijednost turbulentnog poremećenja $\bar{a}' = 0$. Tako npr. molekularno gibanje uvijek smatramo turbulentnim, budući da ne možemo mjeriti efekte pojedinačnih molekula, već samo ukupne efekte cijelog ansambla molekula. Slično, gibanja vezana uz jedan kumululus, turbulentna su sa stanovišta sinoptičke skale, pa ih u skladu s tim u jednadžbe gibanja možemo uključiti pomoću turbulentnih članova.

1.3 Prividne sile

Newtonovi zakoni gibanja vrijede ako gibanje promatramo u inercijalnom koordinatnom sustavu. Međutim, gibanja u atmosferi (i oceanu) promatramo sa Zemlje koja rotira, dakle u sustavu koji je akceleriran (neinercijalan) i u kojem Newtonovi zakoni gibanja ne vrijede. Tako se na primjer tijelo, koje u odnosu na Zemlju miruje, akcelerirano giba u inercijalnom koordinatnom sustavu. (Promatrač koji miruje u inercijalnom sustavu, vidi rotaciju tijela, koja postoji zbog rotacije Zemlje.) Drugim riječima, tijelo se u inercijalnom sustavu ponaša kao da na njega djeluje neka sila. Slično, ako se tijelo u odnosu na Zemlju giba jednoliko po pravcu, za promatrača koji miruje na Zemlji to gibanje je inercijalno. Međutim, za promatrača koji miruje u inercijalnom sustavu, to gibanje je, zbog rotacije same Zemlje, akcelerirano. Stoga, da bi u neinercijalnom sustavu mogli primijeniti Newtonove zakone gibanja, moramo uvažiti akceleraciju koordinata neinercijalnog sustava. To postizemo uvođenjem prividnih sila (pseudosila) u Newtonov drugi zakon (jednadžba 1.2.1). U slučaju neinercijalnog sustava koji jednoliko rotira, prividne sile koje moramo uvesti jesu centrifugalna i Coriolisova sila.

1.3.1. Centrifugalna sila

Promatramo tijelo mase m , koje miruje na Zemljinoj površini (slika 1.7). Za promatrača koji miruje na Zemlji tijelo će mirovati, ali za promatrača koji miruje u fiksnom (inercijalnom) koordinatnom sustavu, tijelo će se tijekom vremenskog intervala δt gibati od početne točke A do točke B brzinom \mathbf{v} (rotirati će duž kuta $\delta\Theta$ konstantnom kutnom brzinom rotacije Zemlje Ω , gdje je $\Omega = 7.292 \cdot 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$). Brzina tijela \mathbf{v} , koju vidi promatrač u inercijalnom sustavu, ima konstantnu magnitudu, ali joj se smjer mijenja. Dakle, gibanje tijela, koje vidi promatrač u inercijalnom sustavu, je akcelerirano: u točki A tijelo ima brzinu \mathbf{v} , a u točki B brzinu $\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}$. Promjena brzine $\delta\mathbf{v}$ usmjerena je prema osi rotacije, budući da se tijelo stalno zakreće prema osi. Dakle, $\delta\mathbf{v}$ je suprotnog smjera od vektora udaljenosti od osi rotacije \mathbf{r} . Iz slike je vidljivo da je modul promjene brzine $|\delta\mathbf{v}| = |\mathbf{v}| \delta\Theta$. Odatle je $\delta\mathbf{v} = |\mathbf{v}| \delta\Theta (-\mathbf{r} / r)$. Podijelimo $\delta\mathbf{v}$ s vremenskim intervalom δt , gdje je δt infinitezimalno malen ($\delta t \rightarrow 0$). Tako dobivamo

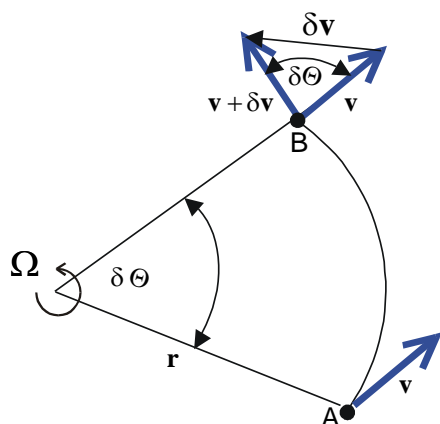
$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = |\mathbf{v}| \frac{d\Theta}{dt} \left(\frac{-\mathbf{r}}{r} \right). \quad (1.3.1)$$

Budući je $|\mathbf{v}| = \Omega r$ i $d\Theta/dt = \Omega$, jednadžba (1.3.1) prelazi u

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\Omega^2 \mathbf{r}. \quad (1.3.2)$$

Gornja jednadžba prikazuje centripetalnu akceleraciju, koju vidi promatrač u fiksnom koordinatnom sustavu. Promatrač koji miruje na Zemlji koja rotira, ne vidi tu akceleraciju. Stoga, da bi u sustavu koji rotira mogli primijeniti Newtonov drugi zakon gibanja, moramo sumi svih sila koje djeluju dodati centrifugalnu silu, koja je u ravnoteži s centripetalnom silom. Akceleracija centrifugalne sile je

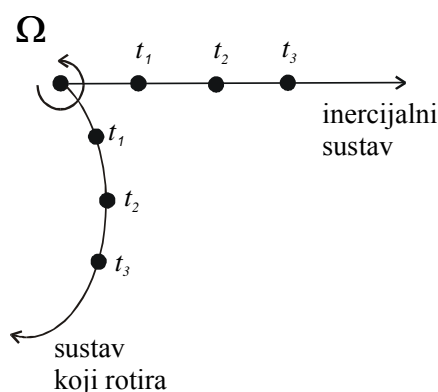
$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \Omega^2 \mathbf{r}. \quad (1.3.3)$$



Slika 1.7. Pogled odozgo na tijelo mase m koje miruje s obzirom na Zemlju. Zemlja rotira konstantnom kutnom brzinom Ω . Vektor udaljenosti tijela od osi rotacije je \mathbf{r} .

1.3.2. Coriolisova sila

Promatramo tijelo koje se giba u odnosu na Zemlju, pri čemu ćemo zanemariti trenje. Da bi na gibanje tijela, koje pratimo sa Zemlje koja rotira, primijenili Newtonov drugi zakon gibanja, moramo uz centrifugalnu uvažiti i Coriolisovu silu¹². Neka se tijelo giba jednoliko po pravcu u odnosu na inercijalni sustav (slika 1.8). Promatrač, koji miruje u inercijalnom sustavu, vidi gibanje tijela po pravcu. Međutim, promatač koji miruje u sustavu koji rotira kutnom brzinom Ω , vidi putanju tijela koja je zakrivljena u smjeru suprotnom od smjera rotacije samog koordinatnog sustava. Dakle promatrač koji miruje na Zemlji, vidi djelovanje prividne (Coriolisove) sile, koja otklanja tijelo od pravocrtne putanje. Drugim riječima, on vidi akcelerirano gibanje, gdje je akceleracija rezultanta Coriolisove i centrifugalne akceleracije. Coriolisova sila djeluje okomito na brzinu tijela, te stoga može promijeniti samo smjer, ali ne i brzinu gibanja. Centrifugalna sila djeluje radijalno prema van. Stoga ima komponentu u smjeru gibanja i zato povećava brzinu tijela u odnosu na rotirajući koordinatni sustav.



Slika 1.8. Promatramo li inercijalno gibanje u inercijalnom sustavu – tijelo se giba po pravcu. Ako isto gibanje promatramo u sustavu koji rotira – tijelo se giba po zakrivljenoj putanji.

Promatramo sad tijelo mase m , koje miruje na Zemljinoj površini na zemljopisnoj širini φ . Gledajući iz neinercijalnog rotirajućeg koordinatnog sustava, na tijelo djeluju fundamentalna gravitaciona sila i prividna centrifugalna sila. Neka se tijelo zatim zbog impulsa neke sile počne gibati brzinom u prema istoku. Trenje zanemarimo. Budući da tijelo sad rotira brže od Zemlje, centrifugalna sila (vidi jednadžbu 1.3.3) se povećava

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \left(\Omega + \frac{u}{r} \right)^2 \mathbf{r} = m\Omega^2 \mathbf{r} + m \frac{2\Omega u}{r} \mathbf{r} + m \frac{u^2}{r^2} \mathbf{r}, \quad (1.3.4)$$

¹² Coriolisova sila dobila je ime po francuskom matematičaru Gustaveu Gaspardu Coriolisu (1792-1843). Premda je Coriolis prvi u znanost uveo pojmove kinetičke energije i rada u istom smislu u kojem se upotrebljavaju i danas, poznatiji je po tome što je 1835. godine pokazao da se zakoni gibanja mogu koristiti u rotirajućem koordinatnom sustavu dodavanjem dodatne akceleracije (Coriolisove akceleracije) u jednadžbe gibanja.

gdje je \mathbf{r} vektor udaljenosti tijela od osi rotacije, a Ω je modul vektora kutne brzine rotacije Zemlje. Prvi član s desne strane jednadžbe (1.3.4) $m\Omega^2\mathbf{r}$ prikazuje centrifugalnu silu, koja zbog rotacije Zemlje prividno djeluje na tijelo u rotirajućem koordinatnom sustavu. Preostala dva člana $m\frac{2\Omega u}{r}\mathbf{r} + m\frac{u^2}{r^2}\mathbf{r}$ prikazuju silu otklona, koja djeluje u smjeru vektora udaljenosti od osi rotacije \mathbf{r} , dakle okomito na os rotacije. Za gibanja na sinoptičkoj skali vrijedi $|u| \ll \Omega r$ (vidi zadatak 1.3.6). Odatle slijedi da je posljednji član u jednadžbi (1.3.4) u prvoj aproksimaciji zanemariv, budući da je

$$m\frac{u^2}{r^2}\mathbf{r} = m\frac{u}{r^2}u\mathbf{r} \ll m\frac{u}{r^2}\Omega r\mathbf{r} = m\frac{\Omega u}{r}\mathbf{r},$$

odnosno

$$m\frac{u^2}{r^2}\mathbf{r} \ll m\frac{2\Omega u}{r}\mathbf{r}.$$

Tako u prvoj aproksimaciji dobivamo

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\Omega^2\mathbf{r} + m\frac{2\Omega u}{r}\mathbf{r}, \quad (1.3.5)$$

gdje prvi član s desne strane opisuje centrifugalnu, a drugi Coriolisovu silu, koja prividno djeluje na tijelo koje se u odnosu na Zemlju giba duž paralele.

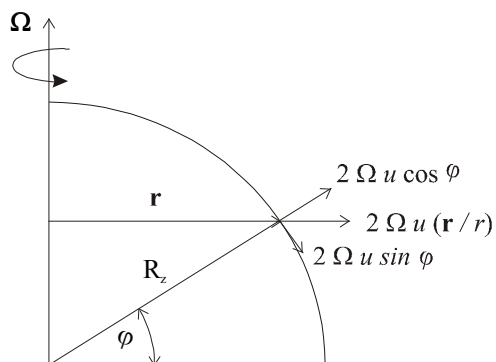
Coriolisovu silu možemo rastaviti na dvije komponente, od kojih je jedna duž meridijana, a druga duž vertikale (slika 1.9). Sa slike je vidljivo da će tijelo koje se relativno giba u odnosu na Zemlju u smjeru istok – zapad imati akceleraciju u smjeru sjever-jug

$$\left(\frac{dv}{dt}\right)_{Co} = -2\Omega u \sin \varphi, \quad (1.3.6)$$

i akceleraciju duž vertikale

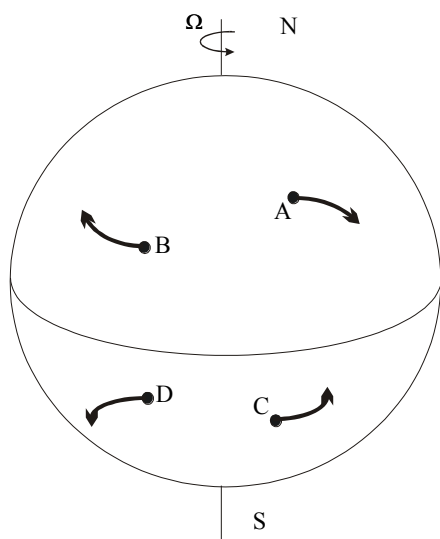
$$\left(\frac{dw}{dt}\right)_{Co} = 2\Omega u \cos \varphi, \quad (1.3.7)$$

gdje su u , v i w komponente brzine usmjerene prema istoku, sjeveru i vertikalno prema gore.



Slika 1.9. Komponente Coriolisove akceleracije u vertikalnom i meridionalnom smjeru, koje se javljaju zbog gibanja tijela duž paralele u odnosu na Zemlju.

Stoga će se tijelo, koje se bez trenja giba na sjevernoj hemisferi ($\varphi > 0$) u horizontalnoj ravnini prema istoku ($u > 0$), otklanjati prema jugu, a tijelo koje se giba prema zapadu ($u < 0$) otklanjati će se prema sjeveru. Vidimo da je otklon u horizontalnoj ravnini na sjevernoj hemisferi uvijek udesno od smjera gibanja tijela (slika 1.10). Suprotno tome, na južnoj hemisferi ($\varphi < 0$) za gibanja prema istoku otklon je prema sjeveru, a za gibanja prema zapadu otklon je prema jugu. Tamo je dakle otklon u horizontalnoj ravnini uvijek ulijevo od smjera gibanja.



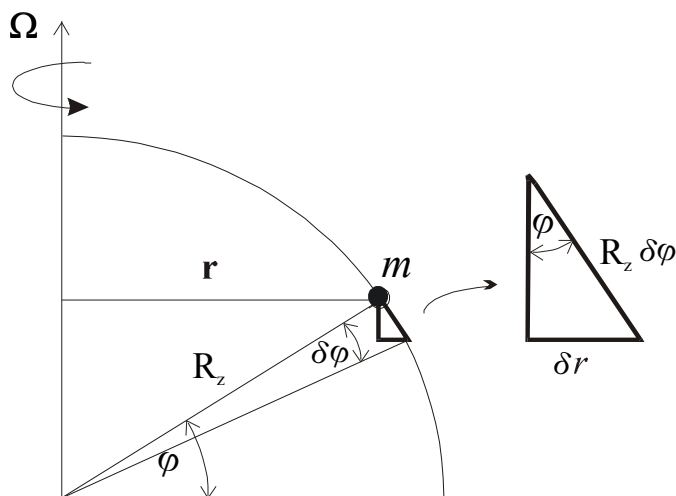
Slika 1.10. Zbog Coriolisove sile tijelo, koje se u odnosu na Zemlju giba duž paralele, otklanja se duž meridijana. Tijelo A, koje se na sjevernoj hemisferi giba prema istoku, otklanja se prema jugu. Tijelo B, koje se na sjevernoj hemisferi giba prema zapadu, otklanja se prema sjeveru. Tijelo C, koje se na južnoj hemisferi giba prema istoku, otklanja se prema sjeveru. Tijelo D, koje se na južnoj hemisferi giba prema zapadu, otklanja se prema jugu.

Vertikalna komponenta Coriolisove sile puno je manja od gravitacione sile (vidi zadatak 1.3.7). Stoga uzrokuje neznatne promjene težine tijela (vidi kasnije zadatak 2.1.3).

Do sad smo promatrali samo gibanje tijela u odnosu na Zemlju duž paralela (zonalno gibanje). Pogledajmo sada utjecaje Coriolisove sile na meridionalno gibanje. Neka se tijelo mase m , koje je u početku mirovalo na sjevernoj hemisferi na zemljopisnoj širini φ , zbog

dobivenog impulsa počne gibati prema jugu. Zakretni moment¹³ tijela \mathbf{L} mora ostati očuvan. Položaj tijela u početnom položaju opisan je geografskom širinom φ i vektorom udaljenosti od osi rotacije \mathbf{r} (slika 1.11). Obodna brzina koju tijelo ima u početnom položaju zbog rotacije Zemlje usmjerena je prema istoku i iznosi $\mathbf{v}(\varphi) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} = u \mathbf{i}$, a zakretni moment tijela je

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\varphi) &= \mathbf{r} \times m \mathbf{v} = \mathbf{r} \times m u \mathbf{i} = \mathbf{r} \times m \Omega r \mathbf{i} = m r \Omega (\mathbf{r} \times \mathbf{i}) = m r \Omega (r \sin(\mathbf{r}, \mathbf{i})) (\boldsymbol{\Omega} / \Omega) = \\ &= m r^2 \Omega \sin 90^\circ = m r^2 \Omega. \end{aligned} \quad (1.3.8)$$



Slika 1.11. Tijelo mase m , u početku se nalazi na geografskoj širini φ na sjevernoj hemisferi. Zatim se počne gibati prema jugu. U novom položaju geografska širina je $\varphi + \delta\varphi$ (gdje je $\delta\varphi < 0$), a radijus udaljenosti od osi rotacije poraste za δr .

Budući da se tijelo giba prema ekvatoru, geografska širina tijela se smanji na $\varphi + \delta\varphi$ (gdje je $\delta\varphi < 0$), a vektor udaljenosti od osi rotacije poraste na vrijednost $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$. Zbog toga obodna brzina u smjeru istoka, koju tijelo u novom položaju ima samo zbog rotacije Zemlje, također poraste na $\mathbf{v}(\varphi + \delta\varphi) = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} + \delta\mathbf{r})$. Zbog porasta radijusa udaljenosti i brzine, porastao bi i zakretni moment na vrijednost $(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) \times m \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} + \delta\mathbf{r})$. Međutim, znamo da zakretni moment mora ostati sačuvan. Stoga se mora razviti komponenta brzine u smjeru zapada $\delta\mathbf{v} = \delta u \mathbf{i}$ (gdje mora biti $\delta u < 0$), takva da zakretni moment u novom položaju ostane jednak zakretnom momentu u početnom položaju. Prema tome, zakretni moment u novom položaju je

$$\mathbf{L}(\varphi + \delta\varphi) = (\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) \times m \mathbf{v}(\varphi + \delta\varphi) + (\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) \times m \delta\mathbf{v}. \quad (1.3.9)$$

Podijelimo jednadžbu (1.3.9) s masom tijela m i uvrstimo

¹³ $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, gdje je \mathbf{r} vektor položaja, a \mathbf{p} je impuls sile, koji ovisi o brzini \mathbf{v} ($\mathbf{p} = m \mathbf{v}$). Ako s \mathbf{M} označimo moment sile \mathbf{F} , $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, gdje je $\mathbf{F} = d\mathbf{p} / dt$, tada je $\mathbf{M} = d\mathbf{L} / dt$.

$$\mathbf{v}(\varphi) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r},$$

i

$$\mathbf{v}(\varphi + \delta\varphi) = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}).$$

Dobivamo zakretni moment po jedinici mase u novom položaju

$$\begin{aligned} (1/m) \mathbf{L}(\varphi + \delta\varphi) &= (\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) \times [\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} + \delta\mathbf{r})] + (\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) \times \delta\mathbf{v} = \\ &= \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \delta\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \delta\mathbf{r}) + \delta\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \delta\mathbf{r}) + (\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) \times m\delta\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

Primijenimo pravilo $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$, gdje su \mathbf{A} , \mathbf{B} i \mathbf{C} proizvoljni vektori. Tako dobivamo

$$\begin{aligned} (1/m) \mathbf{L}(\varphi + \delta\varphi) &= \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}) + \boldsymbol{\Omega}(\delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \delta\mathbf{r}) + \boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r} \cdot \delta\mathbf{r}) - \\ &- \delta\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}) + \boldsymbol{\Omega}(\delta\mathbf{r} \cdot \delta\mathbf{r}) - \delta\mathbf{r}(\boldsymbol{\Omega} \cdot \delta\mathbf{r}) + (\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) \times \delta\mathbf{v}. \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Budući da je $\boldsymbol{\Omega}$ okomit na vektore \mathbf{r} i $\delta\mathbf{r}$ (koji su istog smjera i orijentacije), to su skalarni produkti $\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$, $\boldsymbol{\Omega} \cdot \delta\mathbf{r} = 0$, $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r^2$, $\delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r \delta r$ i $\delta\mathbf{r} \cdot \delta\mathbf{r} = \delta r^2$, pa jednadžba (1.3.11) poprima oblik

$$(1/m) \mathbf{L}(\varphi + \delta\varphi) = r^2 \boldsymbol{\Omega} + r \delta r \boldsymbol{\Omega} + r \delta r \boldsymbol{\Omega} + \delta r^2 \boldsymbol{\Omega} + (\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) \times \delta\mathbf{v}. \quad (1.3.12)$$

Za infinitezimalno male pomake prema jugu $\delta r \rightarrow 0$, pa član $\delta r^2 \boldsymbol{\Omega}$ možemo zanemariti. Konačno dobivamo zakretni moment po jedinici mase tijela u novom položaju

$$(1/m) \mathbf{L}(\varphi + \delta\varphi) = r^2 \boldsymbol{\Omega} + 2 r \delta r \boldsymbol{\Omega} + (\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) \times \delta\mathbf{v}. \quad (1.3.13)$$

Podijelimo jednadžbu (1.3.8) s masom tijela m i izjednačimo s jednadžbom (1.3.13). Tako dobivamo

$$r^2 \boldsymbol{\Omega} = r^2 \boldsymbol{\Omega} + 2 r \delta r \boldsymbol{\Omega} + (\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) \times \delta\mathbf{v},$$

iz čega slijedi

$$\mathbf{0} = 2 r \delta r \boldsymbol{\Omega} + (\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) \times \delta\mathbf{v},$$

odnosno

$$(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) \times \delta\mathbf{v} = -2 r \delta r \boldsymbol{\Omega}, \quad (1.3.14)$$

gdje je

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) \times \delta\mathbf{v} &= (\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}) \times \delta u \mathbf{i} = (r + \delta r) \delta u \sin [(\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}), \mathbf{i}] (\boldsymbol{\Omega} / \Omega) = \\ &= [(r + \delta r) \delta u \sin 90^\circ] (\boldsymbol{\Omega} / \Omega) = (r + \delta r) \delta u (\boldsymbol{\Omega} / \Omega). \end{aligned}$$

Uvrstimo posljednju jednakost u jednadžbu (1.3.14). Tako dobivamo

$$(r + \delta r) \delta u (\Omega / \Omega) = - 2 r \delta r \Omega,$$

odnosno

$$(r + \delta r) \delta u = - 2 r \delta r \Omega.$$

Podijelimo godnju jednadžbu s r . Dobivamo

$$(1 + \delta r / r) \delta u = - 2 \delta r \Omega.$$

Budući da $\delta r \rightarrow 0$, odnosno $r \gg \delta r$, član $\delta r / r$ možemo zanemariti, pa na kraju dobivamo promjenu brzine u x smjeru

$$\delta u = - 2 \delta r \Omega,$$

gdje je $\delta r = - R_z \delta \varphi \sin \varphi$, kao što je ilustrirano na slici 1.11. Odatle je

$$\delta u = 2 \Omega R_z \delta \varphi \sin \varphi. \quad (1.3.15)$$

Podijelimo jednadžbu (1.3.15) s infinitezimalno malim vremenskim intervalom $\delta t \rightarrow 0$. Tako dobivamo akceleraciju u x smjeru zbog djelovanja Coriolisove sile prilikom gibanja česti prema jugu

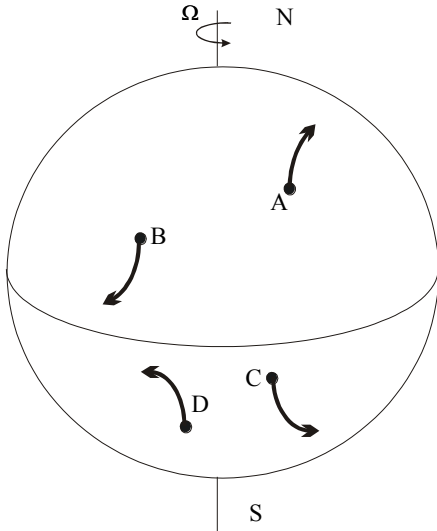
$$\left(\frac{du}{dt} \right)_{Co} = 2 \Omega R_z \frac{d\varphi}{dt} \sin \varphi. \quad (1.3.16)$$

Budući da je komponenta brzine u y smjeru $v = R_z (d\varphi / dt)$, to jednadžba (1.3.16) prelazi u

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_{Co} = 2 \Omega v \sin \varphi. \quad (1.3.17)$$

Jednadžba (1.3.17) pokazuje da se na sjevernoj hemisferi ($\varphi > 0$), zbog sačuvanja zakretnog momenta, gibanja prema jugu ($v < 0$) otklanjaju prema zapadu ($(du / dt)_{Co} < 0$), a gibanja prema sjeveru ($v > 0$), otklanjaju se prema istoku ($(du / dt)_{Co} > 0$). Na južnoj hemisferi, otkloni su zbog $\varphi < 0$, ulijevo od smjera gibanja (slika 1.12). Komponenta Coriolisove akceleracije opisana jednadžbom (1.3.17) uzrokuje skretanje pasata¹⁴. Kada Zemlja ne bi rotirala, pasati bi na sjevernoj hemisferi puhali prema jugu, a na južnoj prema sjeveru. Ovako pri tlu zakreću na način koji je ilustriran točkama B i D na slici 1.12.

¹⁴ Pasati (eng. *trade winds*) – vjetrovi vezani uz opću cirkulaciju atmosfere. Vrlo su stalni i po smjeru i po brzini. Pušu na obje hemisfere od suptropa prema ekvatoru u pojasu između $\approx 30 - 35^\circ \text{N}$ i $\approx 30 - 35^\circ \text{S}$.



Slika 1.12. Zbog Coriolisove sile tijelo, koje se u odnosu na Zemlju giba duž meridijana, otklanja se u zonalnom smjeru. Tijelo A, koje se na sjevernoj hemisferi giba prema sjeveru, otklanja se prema istoku. Tijelo B, koje se na sjevernoj hemisferi giba prema jugu, otklanja se prema zapadu. Tijelo C, koje se na južnoj hemisferi giba prema jugu, otklanja se prema istoku. Tijelo D, koje se na južnoj hemisferi giba prema sjeveru, otklanja se prema zapadu.

Pogledajmo sad tijelo mase m koje se na sjevernoj hemisferi na geografskoj širini φ giba vertikalno prema gore počev od Zemljine površine (slika 1.13). U početnom položaju vektor udaljenosti tijela od osi rotacije je \mathbf{r} . Zbog vertikalnog gibanja prema gore vektor udaljenosti u novom položaju poraste na $\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}$. U početnom položaju zakretni moment tijela po jedinici mase, koji postoji zbog rotacije Zemlje je $\mathbf{r} \times \mathbf{v}(\mathbf{r})$, gdje je $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$. U novom položaju zakretni moment po jedinici mase tijela, koji postoji samo zbog rotacije Zemlje, trebao bi porasti na vrijednost $(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) \times \mathbf{v}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r})$, gdje je $\mathbf{v}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} + \delta \mathbf{r})$, budući da je i radijus udaljenosti od osi rotacije porastao. Kako zakretni moment, koji tijelo ima zbog rotacije Zemlje, mora ostati sačuvan, mora se razviti zonalna komponenta brzine $\delta \mathbf{v}$, takva da zakretni moment tijela u novom položaju bude jednak zakretnom momentu u početnom položaju. Drugim riječima mora vrijediti

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v}(\mathbf{r}) = (\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) \times \mathbf{v}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) + (\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) \times \delta \mathbf{v},$$

odnosno

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) \times (\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{r} + \delta \mathbf{r})) + (\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) \times \delta \mathbf{v}. \quad (1.3.18)$$

Sredimo jednadžbu (1.3.18). Dobivamo

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = (\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\Omega} \times \delta \mathbf{r}) + (\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) \times \delta \mathbf{v},$$

odnosno

$$\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) = \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \delta \mathbf{r}) + \delta \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) + \delta \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \delta \mathbf{r}) + (\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) \times \delta \mathbf{v}.$$

Iz posljednje jednadžbe slijedi

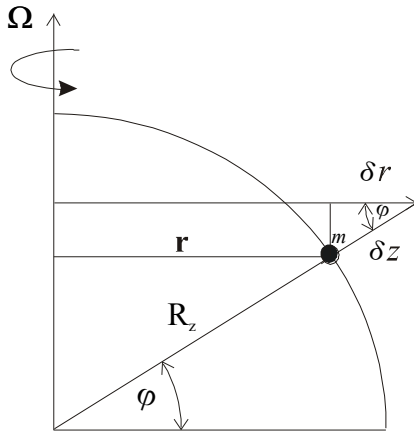
$$\mathbf{0} = \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{r}) - \delta \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}) + \boldsymbol{\Omega} (\delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) - \mathbf{r} (\delta \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}) + \boldsymbol{\Omega} (\delta \mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{r}) - \delta \mathbf{r} (\delta \mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega}) + (\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) \times \delta \mathbf{v}.$$

Budući da vrijedi (vidi sliku 1.13) $\mathbf{r} \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$, $\boldsymbol{\Omega} \cdot \delta \mathbf{r} = 0$, $\delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = r \delta r$ i $\delta \mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{r} = \delta r^2$, gornju jednadžbu možemo pisati ovako

$$\mathbf{0} = \Omega (\mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{r}) + \Omega (\delta \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}) + \Omega (\delta \mathbf{r} \cdot \delta \mathbf{r}) + (\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) \times \delta \mathbf{v},$$

odnosno

$$\mathbf{0} = 2 r \delta r \Omega + \delta r^2 \Omega + (\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) \times \delta \mathbf{v}. \quad (1.3.19)$$



Slika 1.13. Tijelo mase m , u početku se nalazi na geografskoj širini φ na sjevernoj hemisferi. Zatim se počne gibati prema vertikalno prema gore. U novom položaju radijus udaljenosti od osi rotacije poraste za δr .

Pretpostavimo infinitezimalno mali vertikalni pomak tijela, što drugim riječima znači da je $\delta r \rightarrow 0$, odnosno $\delta r^2 \rightarrow 0$. Zanemarimo član s δr^2 te podijelimo jednadžbu (1.3.19) s modulum vektora udaljenosti od osi rotacije r . Tako dobivamo

$$\mathbf{0} = 2 \delta r \Omega + (\mathbf{r} / r + \delta \mathbf{r} / r) \times \delta \mathbf{v},$$

gdje opet možemo zanemariti član s $\delta \mathbf{r} / r$. Budući da je $\delta \mathbf{v}$ zonalna brzina (ima samo komponentu u smjeru istok-zapad) $\delta \mathbf{v} = \delta u \mathbf{i}$, dobivamo

$$\mathbf{0} = 2 \delta r \Omega + (\mathbf{r} / r) \times \delta \mathbf{v} = 2 \delta r \Omega + (\delta u / r) (\mathbf{r} \times \mathbf{i}) = 2 \delta r \Omega + (\delta u / r) r \sin 90^\circ (\Omega / \Omega).$$

Odatle je

$$\delta u = -2 \Omega \delta r.$$

Budući da je $\delta r = \delta z \cos \varphi$ (vidi sliku 1.13), to je

$$\delta u = -2 \Omega \delta z \cos \varphi. \quad (1.3.20)$$

Podijelimo jednadžbu (1.3.20) s δt uz uvjet $\delta t \rightarrow 0$. Tako dobivamo komponentu Coriolisove akceleracije u x smjeru, koja postoji u sustavu koji rotira zbog vertikalnog gibanja tijela

$$\left(\frac{du}{dt} \right)_{c_o} = -2\Omega \frac{dz}{dt} \cos \varphi = -2\Omega w \cos \varphi. \quad (1.3.21)$$

Iz jednadžbe (1.3.21) vidimo da će se tijelo, koje se giba vertikalno prema gore ($w > 0$), otklanjati prema zapadu, a tijelo koje se giba vertikalno prema dolje ($w < 0$), otklanjati će se prema istoku. To vrijedi za obje hemisfere budući je $\cos \varphi = \cos(-\varphi)$. Treba naglasiti da su vertikalne brzine u atmosferi na sinoptičkoj skali puno manje u odnosu na horizontalne brzine. Stoga je doprinos vertikalnog gibanja Coriolisovoj akceleraciji, koji je opisan jednadžbom (1.3.21), zanemarivo malen u odnosu na doprinos horizontalnih gibanja.

Do sada smo zasebno razmatrali gibanje tijela duž paralele, meridijana i vertikale. Pretpostavimo sada da se tijelo giba u odnosu na Zemlju tako da ima komponente brzine u sva tri smjera, gdje je os x usmjerena prema istoku, y prema sjeveru, a z vertikalno prema gore

$$\mathbf{v} = u \mathbf{i} + v \mathbf{j} + w \mathbf{k}.$$

Tijelo će se tada otklanjati zbog Coriolisove akceleracije koja je sada trodimenzionalna

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{dt}\right)_{Co} &= 2\Omega v \sin \varphi - 2\Omega w \cos \varphi, \\ \left(\frac{dv}{dt}\right)_{Co} &= -2\Omega u \sin \varphi, \\ \left(\frac{dw}{dt}\right)_{Co} &= 2\Omega u \cos \varphi, \end{aligned} \tag{1.3.22}$$

pri čemu je na sinoptičkoj skali doprinos vertikalne brzine zanemarivo malen ($w \ll u, v$).

Preporučena dodatna literatura (Potpuna referenca nalazi se u popisu literature.)

- Persson, 1998.

Zadaci

1.3.1. Projektil je ispaljen prema istoku na zemljopisnoj širini 45°N . Ako projektil putuje 1000 km horizontalnom brzinom od 800 m s^{-1} , koliko se zbog Coriolisove sile otkloni u horizontalnoj ravnini od početne paralele i u kojem smjeru? Kutna brzina rotacije Zemlje je $\Omega = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. (**Rješenje:** x - komponenta Coriolisove akceleracije ne ovisi o x - komponenti brzine, jer je $(\partial u / \partial t)_{Co} = 2\Omega v \sin \varphi - 2\Omega w \cos \varphi$. Projektil će se otkloniti u meridionalnom smjeru zbog $(\partial v / \partial t)_{Co} = 2\Omega u \sin \varphi$. Integracijom uz pretpostavku $u = u(0) = \text{konst.} = 800 \text{ m s}^{-1}$ i $\varphi \approx \text{konst.} = 45^\circ\text{N}$, dobije se $v(t) - v(0) = -2\Omega u(0) \sin \varphi t$, gdje je $v(0) = 0$. Odatle se integracijom dobije otklon u y smjeru $\Delta y = -\Omega u(0) t^2 \sin \varphi = -64.4 \text{ km}$, gdje je $t = \Delta x / u(0) = 1250 \text{ s}$. Iz predznaka Δy vidimo da je otklon prema jugu.)

- 1.3.2.** Loptica je ispaljena horizontalno na zemljopisnoj širini od 46°N . Ako loptica 4 sekunde putuje horizontalno i pri tom prijeđe udaljenost od 100 m, koliko se lateralno otkloni zbog rotacije Zemlje? Kutna brzina rotacije Zemlje je $\Omega = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$.
(Rješenje: lateralni pomak je $\Delta l = (\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2}$, gdje je $\Delta x = \int_0^t u_{Co} dt = 2 \Omega |\mathbf{v}| (\sin \alpha \sin \varphi) t^2 / 2$, $\Delta y = \int_0^t v_{Co} dt = -2 \Omega |\mathbf{v}| (\cos \alpha \sin \varphi) t^2 / 2$, u_{Co} i v_{Co} su komponente brzine zbog Coriolisove, a α je kut koji vektor brzine \mathbf{v} zatvara s x osi. Modul brzine je $|\mathbf{v}| = 100 \text{ m} / 4 \text{ s} = 25 \text{ m s}^{-1}$. Na kraju se dobije $\Delta l = 2.1 \text{ cm}$. Uočavamo da Δl ne ovisi o α .)
- 1.3.3.** Pretpostavi da brzina vjetra na geografskoj širini $\varphi = 45^\circ\text{N}$ raste u prvom kilometru atmosfere linearno od vrijednosti $u = 0$ pri tlu, do vrijednosti $u = 20 \text{ m s}^{-1}$ na visini 1 km. U sloju od 1 do 2 km nad tlom brzina linearno poraste sa 20 m s^{-1} na 30 m s^{-1} . Neka je koeficijent kinematičke viskoznosti $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$. Procijeni red veličine akceleracije zbog molekularnog trenja, te red veličine akceleracije Coriolisove sile. Prokomentiraj rezultat. Kutna brzina rotacije Zemlje je $\Omega = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. **(Rješenje:** Postavimo koordinatni sustav tako da je x -os u smjeru strujanja $\mathbf{v} = u\mathbf{i}$. Tada akceleracija zbog molekularnog trenja ima samo x -komponentu $(a_{tr})_x = \nu \nabla^2 u = \nu \partial^2 u / \partial z^2 \sim \nu \{ [u(2 \text{ km}) - u(1 \text{ km})] / \Delta z - [u(1 \text{ km}) - u(0 \text{ km})] / \Delta z \} / \Delta z = 1.5 \cdot 10^{-5} \{ [30 - 20] / 10^3 - [20 - 0] / 10^3 \} / 10^3 = -1.5 \cdot 10^{-10} \text{ m s}^{-2}$. Istovremeno, Coriolisova akceleracija je $\mathbf{a}_{co} = -2 \Omega \times \mathbf{v} = -2(\Omega_y \mathbf{j} + \Omega_z \mathbf{k}) \times u\mathbf{i} = -2(\Omega \cos \varphi \mathbf{j} + \Omega \sin \varphi \mathbf{k}) \times u\mathbf{i} = -2\Omega \sin \varphi u \mathbf{j} + 2\Omega \cos \varphi u \mathbf{k} = 1.03 \cdot 10^{-4} u (\mathbf{k} - \mathbf{j})$. Kako nas ovdje zbog usporedbe s akceleracijom molekularnog trenja zanima samo horizontalna komponenta Coriolisove akceleracije, vidimo da je $(a_{Co})_y \sim -10^{-4} u$. U ovom primjeru na visinama $\geq 500 \text{ m}$ nad tlom brzina ima red veličine 10 m s^{-1} . Stoga je za $z \geq 500 \text{ m}$ red veličine Coriolisove akceleracije $(a_{Co})_y \sim 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$. Red veličine sile molekularnog trenja je 10^7 puta manji, pa silu molekularnog trenja u visini možemo zanemariti.)
- 1.3.4.** Brzina vjetra na geografskoj širini $\varphi = 45^\circ\text{N}$ linearno raste duž vertikale od vrijednosti nula pri tlu do vrijednosti 2 m s^{-1} na visini $z = 1 \text{ cm}$ nad tlom. U idućem centimetru brzina linearno poraste na 3 m s^{-1} . Koeficijent kinematičke viskoznosti je $\nu = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, a kutna brzina rotacije Zemlje je $\Omega = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. Procijeni akceleraciju zbog molekularnog trenja, te je usporedi s akceleracijom Coriolisove sile? Rezultate usporedi s rezultatima zadatka 1.3.3. **(Rješenje:** Akceleracija zbog molekularnog trenja ima red veličine $(a_{tr})_x = \nu \partial^2 u / \partial z^2 \sim 1.5 \cdot 10^{-5} \{ [3 - 2] / 10^{-2} - [2 - 0] / 10^{-2} \} / 10^{-2} = -1.5 \cdot 10^{-1} \text{ m s}^{-2}$. Coriolisova akceleracija je $\mathbf{a}_{co} = 1.03 \cdot 10^{-4} u (\mathbf{k} - \mathbf{j})$, gdje je red veličine brzine $u \sim 1 \text{ m s}^{-1}$. Odatle vidimo da je u blizini tla red veličine sile molekularnog trenja (10^{-1} m s^{-2}) mnogo veći od reda veličine horizontalne komponente Coriolisove sile (10^{-4} m s^{-1}). Prema tome, uz samo tlo molekularno trenje ima važnu ulogu, dok je na većoj udaljenosti od tla zanemarivo malo.)
- 1.3.5.** Izračunaj visinu z na kojoj umjetni satelit u ekvatorijalnoj ravnini može biti geostacionaran. **(Rješenje:** Gravitaciona sila, kojom Zemlja privlači satelit, mora biti u ravnoteži s centrifugalnom silom. Tako se dobije $z = (G M_z / \Omega^2)^{1/3} - R_z = 3.583 \cdot 10^7 \text{ m}$.)
- 1.3.6.** Pokaži da na sinoptičkoj skali vrijedi $|u| \ll \Omega r$, gdje je u horizontalna brzina u smjeru istoka, čiji je red veličine na sinoptičkoj skali 10 m s^{-1} , Ω je kutna brzina rotacije Zemlje, $\Omega = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, a r je modul vektora udaljenosti od osi rotacije. Srednji radijus Zemlje je $R_z = 6371 \text{ km}$. **(Rješenje:** Odredimo Ωr npr. za $\varphi = 45^\circ\text{N}$. Budući je $r = R_z \cos \varphi$, za $\varphi = 45^\circ\text{N}$ dobivamo $\Omega r = 328.4 \text{ m s}^{-1}$, što je puno više od tipične magnitude horizontalnog strujanja $|u| \sim 10 \text{ m s}^{-1}$.)

- 1.3.7.** Pokaži da je vertikalna komponenta Coriolisove sile koja djeluje na tijelo mase m , koje se na geografskoj širini $\varphi = 45^\circ\text{N}$ giba na Zemljinoj površini prema istoku brzinom $u = 10 \text{ m s}^{-1}$, puno manja od gravitacione sile. Srednji radijus Zemlje je $R_z = 6371 \text{ km}$, gravitaciona konstanta G je $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$, masa Zemlje je $M_z = 6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$, a kutna brzina rotacije Zemlje je $\Omega = 7.29 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$. (**Rješenje:** Vertikalna komponenta Coriolisove akceleracije je $2 \Omega u \cos \varphi = 1.03 \cdot 10^{-3} \text{ m s}^{-2}$ i usmjerena je vertikalno prema gore. Gravitaciona akceleracija usmjerena je duž vertikale prema središtu Zemlje i jednaka je $-G M_z m / R_z^2 = 9.86 \text{ m s}^{-2}$. Prema tome gravitaciona sila je za oko četiri reda veličine veća od vertikalne komponente Coriolisove sile.)
- 1.3.8.** Izračunaj kut α između gravitacione sile i sile teže na Zemljinoj površini kao funkciju zemljopisne širine φ . Predpostavi da je radijus Zemlje R_z konstantan. (**Rješenje:** $\sin \alpha = R_z \Omega \sin 2\varphi / (2g)$)
- 1.3.9.** Izračunaj kut α između gravitacione sile i sile teže za čest koja miruje na Zemljinoj površini na ovim zemljopisnim širinama: a) 30°N , b) 45°N , c) 60°N i d) 90°N . Pretpostavi da su radijus Zemlje i akceleracija sile teže konstantni ($a = 6371 \text{ km}$, $g_0 = 9.81 \text{ m s}^{-2}$). (**Rješenje:** a) $8.6 \cdot 10^{-2}^\circ$, b) $9.9 \cdot 10^{-2}^\circ$, c) $8.6 \cdot 10^{-2}^\circ$, d) 0°)

1.4 Totalni diferencijal

Jednadžbe koje matematički prikazuju u atmosferi važeće zakone sačuvanja (poput sačuvanja mase, impulsa ili energije) možemo izvesti na dva načina: u **Eulerovom** ili **Lagrangeovom** koordinatnom sustavu. Infinitesimalni element volumena fluida u Eulerovom sustavu ima oblik paralelepipeda čiji su bridovi δx , δy i δz nepromjenjivi s obzirom na koordinatni sustav. Masa, impuls, energija, ili neko drugo svojstvo vezano uz promatrani element volumena ovisi o rezultatnom toku promatranog svojstva kroz plohe volumena. U Lagrangeovom referentnom sustavu promatra se infinitesimalni materijalni element fluida (element mase ili čest), koji se u svakom trenutku sastoji od istih čestica (dakle masa mu je nepromijenjiva, a identitet sačuvan).

Zakoni sačuvanja imaju najjednostavniji oblik ako su prikazani za materijalni element fluida. Stoga je Lagrangeov sustav naročito pogodan za njihovo izvođenje. Eulerov sustav međutim, pogodan je za rješavanje većine problema, budući da su polja varijabli prikazana u sustavu (x, y, z, t) u kojem su koordinate x, y, z i t nezavisne varijable. Za razliku od toga u Lagrangeovom sustavu za svaku promatranu čest fluida treba poznavati promjene atmosferskih polja u vremenu. Dakle u tom slučaju nezavisne varijable su x_0, y_0, z_0 i t , gdje je (x_0, y_0, z_0) položaj česti u početnom trenutku t_0 .

Newtonov drugi zakon govori o akceleraciji koju ima tijelo zbog djelovanja sila koje djeluju na njega. U meteorologiji nas pak često zanima akceleracija u fiksnoj točki prostora. Stoga trebamo izvesti vezu između akceleracije u sustavu koji prati gibanje (Lagrangeovom referentnom sustavu) i akceleracije u sustavu koji je fiksna u prostoru (Eulerovom referentnom sustavu). Slično, da bi zakone sačuvanja, koji su izvedeni u Lagrangeovom sustavu, mogli primijeniti na Eulerov sustav, trebamo vremensku promjenu promatrane varijable, koja je prikazana u jednom referentnom sustavu, povezati s vremenskom promjenom iste varijable prikazanom u drugom sustavu. Vremenska promjena varijable prikazana u Lagrangeovom sustavu, koji prati gibanje česti, naziva se totalni diferencijal i opisuje ukupnu promjenu varijable, a označava se s D/Dt (u starijoj literaturi umjesto D/Dt često se nalazi d/dt). Totalni diferencijal naziva se još i **materijalni** ili **procesni** diferencijal, da bi se naglasilo da je to promjena koja se računa prateći gibanje česti fluida, odnosno

promjena prateći neki fizikalni proces kojem je čest podvrgnuta. Za razliku od toga parcijalna derivacija po vremenu $\partial/\partial t$ opisuje vremensku promjenu varijable u fiksnoj točki (dakle lokalnu promjenu) i naziva lokalni diferencijal. Vezu između ukupne i lokalne promjene neke varijable, ilustrirati ćemo na primjeru temperature. Zamislimo vjetrom nošen balon na kojem je termometar. Neka se u početnom trenutku t_0 balon nalazi u točki (x_0, y_0, z_0) . Neka je T_0 temperatura zraka u točki (x_0, y_0, z_0) i trenutku t_0 . Ako se balon tijekom vremenskog intervala δt pomakne u točku $(x_0 + \delta x, y_0 + \delta y, z_0 + \delta z)$, termometar zabilježi promjenu temperature δT . Treba uočiti da je δT promjena temperature prateći gibanje. Tu promjenu možemo razviti u Taylorov red

$$\delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial t}\right)\delta t + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\delta x + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\delta y + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\delta z + (\text{članovi višeg reda}).$$

Podijelimo gornji izraz sa δt uz pretpostavku da je δt infinitezimalno mali

$$\frac{DT}{Dt} \equiv \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\delta T}{\delta t}.$$

Tako za limes $\delta t \rightarrow 0$ dobivamo dobivamo promjenu temperature prateći gibanje

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)\frac{Dx}{Dt} + \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)\frac{Dy}{Dt} + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)\frac{Dz}{Dt}.$$

Uvrstimo

$$\frac{Dx}{Dt} \equiv u, \quad \frac{Dy}{Dt} \equiv v, \quad \frac{Dz}{Dt} \equiv w,$$

gdje su $u, v, i w$ komponente brzine u x, y i z smjeru

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z}\right). \quad (1.4.1)$$

Upotrebom vektorske notacije taj izraz možemo pisati ovako

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{DT}{Dt} - \mathbf{v} \cdot \nabla T, \quad (1.4.2)$$

gdje je $\mathbf{v} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ vektor brzine. Član $-\mathbf{v} \cdot \nabla T$ zove se **advekcija** temperature i opisuje koliko će se u nekoj točki (dakle lokalno) promijeniti temperatura samo zbog gibanja zraka (odnosno zbog donošenja hladnijeg ili toplijeg zraka u promatranu točku). Naprimjer, ako vjetar puše iz hladnijeg područja u područje gdje se nalazi topliji zrak, tada je advekcija temperature negativna, pa govorimo o hladnoj advekciji, jer advektivni član doprinosi opadanju temperature u promatranj točki. Suprotno, ako je $-\mathbf{v} \cdot \nabla T > 0$, radi se o toploj advekciji jer zrak struji iz toplijeg prema hladnijem području, te stoga temperatura lokalno raste. Iz jednadžbe (1.4.2) vidi se da je lokalna promjena temperature jednaka zbroju promjene temperature prateći gibanje (koja opisuje zagrijavanje ili ohlađivanje pojedinih česti zraka) i advektivne promjene temperature.

Izrazi oblika (1.4.1) ili (1.4.2) vrijede ne samo za temperaturu, već vrijede i za druga atmosferska polja poput temperature, brzine, tlaka, gustoće, napetosti itd. Neka je polje F proizvoljna kontinuirana funkcija vremena i prostora: $F = F(x, y, z, t)$. Tada jednadžba (1.4.1) prelazi u

$$\frac{DF}{Dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \left(u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} + w \frac{\partial F}{\partial z} \right). \quad (1.4.3)$$

gdje DF/Dt izražava vremensku promjenu varijable F u koordinatnom sustavu koji se giba zajedno s 'individualnom' česti zraka. Vidimo da se totalni diferencijal varijable F sastoji od lokalne promjene u vremenu $\partial F/\partial t$ (koja postoji zbog promjena u čvrstoj točki koordinatnog sustava) i advektivne promjene ili advektivnog diferencijala $\mathbf{v} \cdot \nabla F$ (koji postoji zbog prijenosa česti iz jedne u drugu točku koordinatnog sustava). Ako je strujanje **stacionarno**, lokalna promjena $\partial F/\partial t$ je jednaka nuli. Nadalje, definicija totalnog diferencijala nije isključivo vezana za gibanje u polju vjetra. Možemo ga definirati i s obzirom na neko drugo gibanje, kao što je npr. ilustrirano zadacima 1.4.1 i 1.4.2.

Ako je totalni diferencijal neke varijable jednak nuli, tada je ta varijabla **konzervativna veličina** s obzirom na gibanje. Lokalna promjena varijable postoji tada samo zbog advekcije. Kasnije će se pokazati da su varijable koje su sačuvane (konzervativne) ili približno sačuvane s obzirom na gibanje naročito važne u dinamičkoj meteorologiji.

Zadaci

- 1.4.1. Polje tlaka pri tlu opada za 1 hPa po 60 km u smjeru istoka. Brod putuje prema istoku brzinom od 10 km h⁻¹. Instrument na brodu bilježi pad tlaka od 1 hPa (3h)⁻¹. Kolika je promjena tlaka na otoku pored kojeg brod prolazi? (**Rješenje:** $\partial p/\partial t = -1 \text{ hPa (6h)}^{-1}$)
- 1.4.2. Brod putuje prema sjeveru brzinom od 10 km h⁻¹. Tlak pri tlu raste prema sjeverozapadu za iznos od 5 Pa km⁻¹. Koliku tendenciju tlaka bilježi barograf na obližnjem otoku, ako tlak na brodu opada za 1 hPa (3h)⁻¹? (**Rješenje:** $\partial p/\partial t = -2 \text{ hPa (3h)}^{-1}$)
- 1.4.3. Izračunaj lokalnu promjenu temperature tijekom jednog sata ako horizontalni vjetar brzine 6 m s⁻¹ zatvara kut od 60° sa smjerom najvećeg pada temperature. Temperatura u smjeru najvećeg pada opada za 1°C po 50 km, a temperatura pojedinih česti zraka u vremenu se ne mijenja. (**Rješenje:** $DT/Dt = 0$, odatle je $\partial T/\partial t = 0.216^\circ\text{C h}^{-1}$.)
- 1.4.4. Temperatura u točki koja se nalazi 100 km sjeverno od meteorološke postaje je 6°C niža od temperature na postaji. Koliko će se promijeniti temperatura na postaji, ako

puše sjeveroistočni vjetar brzine 10 m s^{-1} , a zrak se zbog zračenja zagrijava 1°C h^{-1} ?
(Rješenje: $\partial T/\partial t = -0.527^\circ\text{C h}^{-1}$)

1.4.1. Totalni diferencijal vektora u sustavu koji rotira

Newtonovi zakoni vrijede u **inercijalnom** referentnom sustavu, dakle u sustavu koji miruje ili se giba jednoliko po pravcu. Tako naprimjer zakon sačuvanja impulsa (drugi Newtonov zakon gibanja) kaže da je promjena impulsa tijela u jedinici vremena prateći gibanje, koja se vidi iz inercijalnog sustava, jednaka rezultanti svih sila koje djeluju na tijelo. Međutim, naša mjerenja strujanja geofizičkih fluida (atmosfera i oceana), vezana su za Zemlju koja rotira. I kod prognoza također, zanima nas buduće strujanje u odnosu na Zemlju (sustav koji rotira, pa je stoga neinercijalan), a ne strujanje u odnosu na neku čvrstu točku u svemiru (inercijalni sustav). Zato želimo Newtonov drugi zakon napisati u referentnom sustavu koji rotira. Da bi to mogli učiniti, trebamo pronaći vezu između totalnog diferencijala vektora u inercijalnom sustavu i totalnog diferencijala u sustavu koji rotira.

Neka je \mathbf{A} proizvoljan vektor čije su kartezijeve komponente u inercijalnom sustavu

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k},$$

a komponente u sustavu koji rotira kutnom brzinom rotacije Ω

$$\mathbf{A} = A'_x \mathbf{i}' + A'_y \mathbf{j}' + A'_z \mathbf{k}'.$$

Neka je $D_a \mathbf{A}/Dt$ totalni diferencijal vektora \mathbf{A} u inercijalnom sustavu

$$\frac{D_a \mathbf{A}}{Dt} = \frac{DA_x}{Dt} \mathbf{i} + \frac{DA_y}{Dt} \mathbf{j} + \frac{DA_z}{Dt} \mathbf{k} = \frac{DA'_x}{Dt} \mathbf{i}' + \frac{DA'_y}{Dt} \mathbf{j}' + \frac{DA'_z}{Dt} \mathbf{k}' + \frac{D\mathbf{i}'}{Dt} A'_x + \frac{D\mathbf{j}'}{Dt} A'_y + \frac{D\mathbf{k}'}{Dt} A'_z.$$

Uočavamo da je totalni diferencijal vektora \mathbf{A} , ako ga promatramo iz rotirajućeg koordinatnog sustava, upravo identičan članu $\frac{DA'_x}{Dt} \mathbf{i}' + \frac{DA'_y}{Dt} \mathbf{j}' + \frac{DA'_z}{Dt} \mathbf{k}'$. Dakle

$$\frac{DA'_x}{Dt} \mathbf{i}' + \frac{DA'_y}{Dt} \mathbf{j}' + \frac{DA'_z}{Dt} \mathbf{k}' \equiv \frac{D\mathbf{A}}{Dt}$$

Nadalje, vektor \mathbf{i}' možemo smatrati vektorom položaja jedinične duljine. Tada je $D\mathbf{i}'/Dt$ brzina koju vektor \mathbf{i}' ima zbog rotacije: $D\mathbf{i}'/Dt = \Omega \times \mathbf{i}'$. Slično vrijedi i za preostala dva jedinična vektora: $D\mathbf{j}'/Dt = \Omega \times \mathbf{j}'$ i $D\mathbf{k}'/Dt = \Omega \times \mathbf{k}'$, pa totalni diferencijal vektora \mathbf{A} u inercijalnom koordinatnom sustavu možemo pisati

$$\frac{D_a \mathbf{A}}{Dt} = \frac{D\mathbf{A}}{Dt} + \Omega \times \mathbf{A}. \quad (1.4.4)$$

Jednadžbom (1.4.4) smo totalni diferencijal vektora u inercijalnom sustavu ($D_a\mathbf{A}/Dt$) povezali s totalnim diferencijalom vektora u neinercijalnom sustavu ($D\mathbf{A}/Dt$) koji rotira kutnom brzinom rotacije Ω .

1.5 Zakoni plina

U proučavanju svojstava atmosfere i atmosferskih procesa uvodimo pojam **česti** zraka. Pod česti zraka najčešće podrazumijevamo masu zraka čija su termodinamička svojstva jednolika, a tijekom promatranog procesa u česti se nalazi uvijek isti zrak. Čest zraka je osnovni **termodinamički sustav**. Katkad pod česti zraka podrazumijevamo promatrani volumen (a ne masu) zraka.

Budući da je masa atoma i molekula jako mala (vidi Dodatak II), u kemiji i fizici je uobičajeno umjesto mase izražavati količinu tvari u bezdimenzionalnim jedinicama - molovima. 1 mol je definiran kao količina tvari koja u sebi sadrži toliko čestica (molekula ili atoma) promatrane tvari koliko u 0.012 kg izotopa ugljika C-12 ima atoma. U jednom molu tvari nalazi se uvijek jednak broj molekula (ako se radi o kemijskom spoju, ili atoma ako se radi o kemijskom elementu). Taj broj nazivamo Avogadrov broj $N_A = 6.022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1} = 6.022 \cdot 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$. Masa jednog mola (molarna masa) numerički je jednaka molekularnoj (ili atomskoj) masi M . Tako npr. 1 mol molekularnog vodika sadrži ukupno $6.022 \cdot 10^{23}$ molekula H_2 i ima masu od 2 g (dakle $M = 2 \text{ g mol}^{-1}$), dok 1 kmol molekularnog kisika ima $6.022 \cdot 10^{26}$ molekula O_2 i masu od 32 kg ($M = 32 \text{ kg kmol}^{-1}$).

Volumen jednog mola plina ovisi o tlaku i temperaturi, ali je pri istom tlaku i temperaturi jednak za sve plinove. Volumen koji ima 1 mol plina pri standardnim uvjetima ($p = 1013.250 \text{ hPa}$, $T = 273.15 \text{ K}$) naziva se molarni volumen $V_m = 22.414 \text{ l mol}^{-1} = 22.414 \text{ m}^3 \text{ kmol}^{-1}$.

1.5.1. Varijable stanja

Varijable stanja ili **termodinamičke varijable** potpuno opisuju stanje promatranog termodinamičkog sustava (česti). Varijable stanja plina za promatranu čest mase m su tlak (p), temperatura (T) i volumen (V). Tlak je skalarna veličina definirana kao sila po jedinici površine. Zbog magnitude tlaka u atmosferi uobičajena jedinica tlaka u meteorologiji je hPa (hektopaskal), gdje je $1 \text{ hPa} = 100 \text{ Pa} = 100 \text{ N m}^{-2} = 100 \text{ kg m}^{-1} \text{ s}^{-2} = 1 \text{ mb}$. Prosječni tlak na razini mora iznosi 1013.2 hPa, pa se tlak katkad izražava i u jedinicama normalne atmosfere (N atm.), gdje $1 \text{ N atm.} = 1013.2 \text{ hPa}$. U tehničkoj literaturi koristi se i jedinica tehnička atmosfera (T atm.), gdje je $1 \text{ T atm.} = 1 \text{ kp cm}^{-2}$.

Temperatura je manifestni oblik topline, a u jednadžbama dinamičke meteorologije izražava se u Kelvinima (K): $T = t + 273.15$, gdje je T temperatura (K), a t temperatura ($^{\circ}\text{C}$). Volumen se u meteorologiji izražava u kubičnim metrima.

Čest mase m i volumena V ima gustoću ρ , koja ovisi samo o masi i volumenu česti: $\rho = m / V$. Stoga umjesto volumena kao varijablu stanja možemo koristiti gustoću ρ (kg m^{-3}) ili njenu recipročnu vrijednost $\alpha = \rho^{-1} = V / m$, gdje je α ($\text{m}^3 \text{ kg}^{-1}$) specifični volumen. Pri tlaku od 1 N atm. i temperaturi od 0°C gustoća i specifični volumen zraka imaju ove vrijednosti: $\rho = 1.293 \text{ kg m}^{-3}$ i $\alpha = 0.773 \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1}$.

Djelovanjem nekog procesa (npr. dodavanjem topline ili komprimiranjem česti vanjskom silom) stanje česti će se promijeniti – sustav će doći u novo termodinamičko stanje u kojem varijable stanja imaju nove vrijednosti. Te nove vrijednosti potpuno opisuju novo stanje česti. Tako npr., ako česti dodajemo toplinu, tako da joj volumen ostane konstantan, temperatura česti će porasti.

Uz tlak, temperaturu, volumen i gustoću postoje i druge varijable stanja, poput entropije, unutrašnje energije i drugih, o kojima će kasnije biti riječi. Termodinamičke varijable dijelimo na **ekstenzivne** i **intenzivne**. Ekstenzivne su one čija vrijednost poraste toliko puta koliko puta povećamo količinu materije. Na primjer, ako udvostručimo masu promatranog plina (zadržavši sve ostale uvjete nepromijenjenima), udvostručit će se njegov volumen, unutrašnja energija i vrijednosti drugih ekstenzivnih varijabli. Za razliku od toga, vrijednosti intenzivnih varijabli ne ovise o količini materije (npr. temperatura).

1.5.2. Boyleov zakon

Robert Boyle 1662. godine na temelju laboratorijskih eksperimenata otkriva da je tlak plina konstantne mase i konstantne temperature obrnuto proporcionalan volumenu plina

$$p V = k_1 \quad (\text{uz } m = \text{konst. i } T = \text{konst.}), \quad (1.5.1)$$

gdje je k_1 konstanta proporcionalnosti (koja je konstantna samo za konstantnu temperaturu, a općenito je $k_1 = k_1(T)$). Četiri godine kasnije isti zakon otkriva i francuski fizičar Edme Mariotte, pa se ovaj zakon katkad naziva i Boyle-Mariotteov zakon. Boyleov zakon nije potpuno točan za sve realne plinove, ali je dobra aproksimacija za permanentne plinove¹⁵ (poput H_2 , O_2 , N_2 i He), koji se teško likvificiraju. Kod niskih tlakova Boyleov zakon vrijedi i za sve realne plinove.

1.5.3. Charlesov zakon

Francuski fizičar Jacques Charles 1787. godine otkriva da je volumen promatrane mase plina m pri konstantnom tlaku proporcionalan temperaturi plina

$$V = k_2 T \quad (\text{uz } m = \text{konst. i } p = \text{konst.}), \quad (1.5.2)$$

gdje je k_2 konstanta proporcionalnosti (koja je konstantna samo pri konstantnom tlaku, a općenito je $k_2 = k_2(p)$). Ovakvo ponašanje plina kasnije je eksperimentalno potvrdio još jedan francuski znanstvenik (Joseph Gay-Lussac). Stoga se isti zakon katkad naziva Gay-Lussacov zakon. Charlesov zakon također nije potpuno točan za sve realne plinove, već je točniji za one koji se teže likvificiraju.

Boyleov i Charlesov zakon možemo kombinirati, te tako doći do još jednog zakona plina. Promatramo uzorak zraka konstantne mase m . Neka su početni tlak, temperatura i volumen uzorka p_1 , T_1 i V_1 . Održavamo najprije temperaturu konstantnom $T_1 = \text{konst.}$, a tlak povišujemo s vrijednosti p_1 na p_2 . Prema Boyleovom zakonu (1.5.1) volumen će se smanjiti na vrijednost V_2' takvu da vrijedi $p_1 V_1 = p_2 V_2'$. Odatle je $V_2' = p_1 V_1 / p_2$. Sada održavamo

¹⁵ Permanentni plinovi su oni koji se teško likvificiraju (teško prelaze u tekuće stanje).

tlak konstantnim $p_2 = \text{konst.}$, a temperaturu uzorka povišujemo s T_1 na T_2 . Stoga po Charlesovom zakonu (1.5.2) volumen mora porasti na vrijednost V_2 , takvu da vrijedi $V_2 / T_2 = V_2' / T_1$. Odatle je $V_2 = V_2' T_2 / T_1 = (p_1 V_1 / p_2) T_2 / T_1 = p_1 V_1 T_2 / p_2 T_1$. Kad pomnožimo jednadžbu $V_2 = p_1 V_1 T_2 / p_2 T_1$ s p_2 / T_2 dobivamo $p_2 V_2 / T_2 = p_1 V_1 / T_1$, što drugim riječima znači da veličina $p V / T$ mora biti konstantna

$$pV / T = k, \quad (1.5.3)$$

gdje je k konstanta proporcionalnosti.

Odredimo konstantu u kombiniranoj plinskoj jednadžbi (1.5.3) na temelju vrijednosti pri standardnim uvjetima. Pri standardnim uvjetima ($p = 1013.250 \text{ hPa}$, $T = 273.15 \text{ K}$) volumen jednog kilomola plina mora biti jednak molarnom volumenu $V_m = 22.414 \text{ m}^3 \text{ kmol}^{-1}$, bez obzira na to koji plin promatramo. Stoga i konstanta vrijedi za svaki plin, te je stoga zovemo **univerzalna plinska konstanta R^*** :

$$\begin{aligned} R^* &= pV / T = (101325.0 \text{ Pa})(22.414 \text{ m}^3 \text{ kmol}^{-1}) / 273.15 \text{ K} = \\ &= 8314 \text{ J kmol}^{-1} \text{ K}^{-1} = 8.314 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}. \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

Dakle, za jedan kmol plina mora vrijediti:

$$pV_m = R^* T. \quad (1.5.5)$$

Jednadžba (1.5.5) vrijedi naravno i za 1 mol plina, samo tada trebamo V_m i R^* izraziti u vrijednostima koje vrijede za jedan mol.

1.5.4. Daltonov zakon

Zakon, koji je 1801. godine otkrio engleski kemičar i fizičar John Dalton¹⁶ kaže da je tlak kojim tlači smjesa plinova jednak sumi parcijalnih tlakova svih plinova:

$$p = \sum_{k=1}^n p_k. \quad (1.5.6)$$

gdje je p tlak smjese plinova, p_k je tlak k -te komponente smjese (parcijalni tlak), a n je broj plinova u smjesi.

1.5.5. Jednadžba stanja idealnog plina

Jednadžba (1.5.5) strogo vrijedi za **idealni plin**. Idealni plin je plin male gustoće u kojem je sudaranje atoma ili molekula potpuno elastično, a prosječna udaljenost susjednih molekula

¹⁶ John Dalton (1766-1844) se između ostalog bavio meteorologijom i razvojem instrumenata za potrebe meteoroloških mjerenja. 1787. godine započeo je niz meteoroloških opažanja i mjerenja u području Manchestera, te je s njima nastavio sve do kraja života, prikupivši tako oko 200 000 podataka o vremenu. Između ostalog poznat je i po tome što je prvi znanstveno opisao nemogućnost razlikovanja boja, koja se po njemu naziva daltonizam, a od koje je i sam patio.

ili atoma puno veća od međučestičnih sila. Stoga potencijalna energija ne utječe bitno na ponašanje idealnog plina. Drugim riječima, sva unutrašnja energija takvog plina je u formi kinetičke energije. Atmosferski plinovi su realni plinovi. Stoga njihovo ponašanje odstupa od ponašanja idealnog plina. Što je tlak realnog plina manji, to je njegovo ponašanje sličnije ponašanju idealnog plina.

Promatramo 1 kmol idealnog plina molekularne mase M . Neka su volumen, temperatura i tlak plina V_m , T i p . Tada je specifični volumen plina $\alpha = V_m / M$, pa volumen plina možemo izraziti preko specifičnog volumena i molekularne mase: $V_m = \alpha M$. Za 1 kmol plina vrijedi jednačba (1.5.5) u koju uvrstimo $V_m = \alpha M$. Dobije se

$$p \alpha M = R^* T. \quad (1.5.7)$$

Podijelimo jednačbu (1.5.7) s molekularnom masom. Tako dobivamo jednačbu koja vrijedi za jediničnu masu idealnog plina, a naziva se jednačba stanja idealnog plina

$$p \alpha = (R^* / M) T = R T. \quad (1.5.8)$$

Konstanta $R = R^* / M$ ovisi o molekularnoj masi idealnog plina i stoga se zove **specifična plinska konstanta idealnog plina** ($J \text{ kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$).

Treba uočiti da se uz $T = \text{konst.}$ jednačba stanja svodi na Boyleov zakon (1.5.1), a uz $p = \text{konst.}$ na Charlesov zakon (1.5.2).

Jednačba stanja idealnog plina može se pisati i drugačije. Prvi ju je izveo Emil Clapeyron 1834. godine i to u obliku

$$p V = n R^* T, \quad (1.5.9)$$

gdje je n je broj kmolova plina koji se nalazi u masi plina m koja zauzima volumen V (vidi zadatak 1.5.6). Još jedan oblik plinske jednačbe je

$$p V = N k T, \quad (1.5.10)$$

gdje je N broj molekula ili atoma plina koji se nalazi u volumenu plina V , a k je Boltzmannova konstanta $k = R^* / N_A = 1.3806 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$ (vidi zadatak 1.5.7). U meteorologiji se plinska jednačba najčešće koristi u obliku (1.5.8).

Primjenom Daltonovog zakona možemo pokazati da smjesa idealnih plinova također zadovoljava jednačbu stanja (1.5.8). Promatramo smjesu koja se sastoji od n plinova. Svaki pojedinačni plin, ako je idealan, zadovoljava jednačbu (1.5.8). Za k -ti sastojak, gdje je $k = 1, \dots, n$ vrijedi

$$p_k \alpha_k = (R^* / M_k) T, \quad (1.5.11)$$

gdje je p_k parcijalni tlak, α_k je specifični volumen, a M_k je molekularna (atomska) masa k -tog sastojka. Podijelimo jednačbu (1.5.11) sa specifičnim volumenom k -tog sastojka

$$p_k = R^* T / (M_k \alpha_k), \quad (1.5.12)$$

te uvrstimo $\alpha_k = V / m_k$, gdje je m_k masa k-tog sastojka, a V je volumen smjese. (Uočavamo da sastojak zauzima cijeli volumen smjese). Tako dobivamo jednadžbu

$$p_k = (m_k / M_k) R^* T / V \quad (1.5.13)$$

na koju primjenjujemo Daltonov zakon. Suma parcijalnih tlakova svih sastojaka mora biti jednaka ukupnom tlaku smjese p

$$p = \sum_{k=1}^n p_k = \frac{R^* T}{V} \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{M_k}. \quad (1.5.14)$$

Pomnožimo jednadžbu (1.5.14) sa specifičnim volumenom smjese $\alpha = V / m$, gdje je m ukupna masa smjese $m = \sum m_k$. Tako dobivamo

$$p\alpha = \left(\frac{R^* T}{V} \sum_{k=1}^n \frac{m_k}{M_k} \right) \frac{V}{\sum_{k=1}^n m_k}. \quad (1.5.15)$$

Uvedemo u jednadžbu (1.5.15) prividnu molekularnu masu smjese \bar{M} , gdje je $\bar{M} = \frac{\sum_{k=1}^n m_k}{\sum_{k=1}^n \frac{m_k}{M_k}}$.

Tako dobivamo

$$p\alpha = \frac{R^* T}{\bar{M}}, \quad (1.5.16)$$

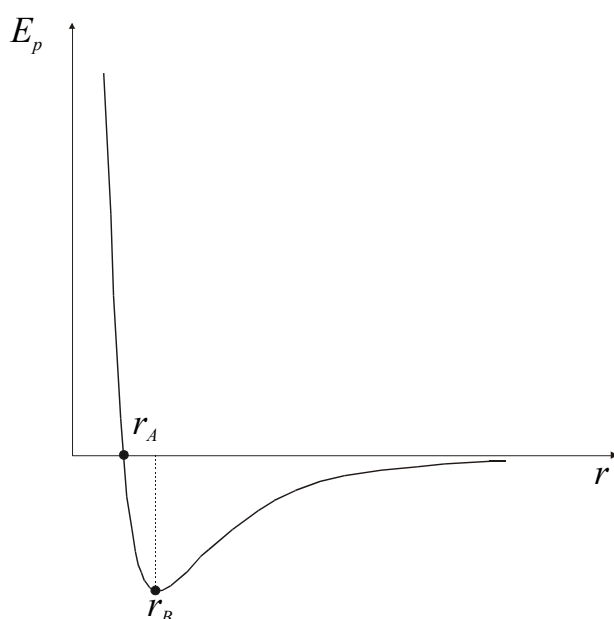
čime smo pokazali da smjesa idealnih plinova, čija je prividna molekularna masa \bar{M} jednaka harmoničkom srednjaku molekularnih masa sastojaka M_k ponderiranih masom sastojka m_k , zadovoljava jednadžbu stanja idealnog plina.

1.5.6. Jednadžba stanja realnog plina

Realni plin ima veću gustoću od idealnog plina i njegovo ponašanje odstupa od ponašanja idealnog plina. Zbog veće gustoće, prosječna udaljenost susjednih molekula ili atoma (r) u realnom plinu dovoljno je mala da potencijalna energija (E_p) bitno utječe na ponašanje plina (slika 1.14). Radijus udaljenosti čestica za koji je $E_p = 0$, naziva se van der Waalsov radijus. Ako je udaljenost među česticama manja od van der Waalsovog radijusa (odnosno, ako je plin dovoljno gust), potencijalna energija je pozitivna, pa se čestice međusobno odbijaju. Ako je udaljenost među česticama veća od van der Waalsovog radijusa, čestice se međusobno privlače. Međutim, sa slike 1.14 vidimo da su privlačne sile među česticama rjeđih plinova puno slabije od odbojnih sila među česticama gušćih plinova. Nadalje, kako r raste, tako i E_p teži k nuli. To drugim riječima znači da je utjecaj potencijalne energije na ponašanje plina male gustoće zanemariv.

Očito je da stanje realnog plina moramo opisati jednačbom koja je kompliciranija od jednačbe stanja idealnog plina. Takva jednačba mora obuhvaćati i privlačenje i odbijanje molekula ili atoma plina. Postoji više jednačbi stanja realnog plina, od kojih se najčešće upotrebljava van der Waalsova¹⁷.

Pretpostavimo da se čestice plina (molekule ili atomi) ponašaju poput tvrdih kuglica. Međusobno odbijanje čestica možemo tada objasniti činjenicom da dvije čestice ne mogu istovremeno zauzimati isti volumen. Označimo volumen plina s V , a volumen koji zauzimaju čestice plina sa $n b$, gdje je $V \gg n b$, n je broj kmolova plina, a b je konstanta koja ovisi o termodinamičkom gibanju čestica. Tada je efektivni volumen plina (volumen unutar kojeg se čestice mogu gibati), $V_{ef} = V - n b$. Uvođenjem efektivnog volumena uvažili smo efekte odbijanja čestica pojednostavljenim pristupom klasične fizike¹⁸.



Slika 1.14. Potencijalna energija dviju molekula ili atoma (E_p) kao funkcija međusobne udaljenosti promatranih čestica (r). Radijus udaljenosti čestica $r = r_A$, za koji je $E_p = 0$, naziva se van der Waalsov radijus. Za radijus udaljenosti $r = r_B$ potencijalna energija čestica je minimalna. U području $E_p > 0$, čestice se međusobno odbijaju, a u području $E_p < 0$, čestice se privlače.

Privlačenje čestica uvažit ćemo uvođenjem efektivnog broja molekula ili atoma N_{ef} . Privlačenje čestica dovodi do njihovog udruživanja, čime efektivni broj čestica postaje manji. Što je gustoća plina veća, to je prividno smanjenje broja čestica efikasnije. Nadalje, privlačenje čestica je to slabije što je temperatura plina veća, budući da s porastom temperature rastu i brzine gibanja čestica, odnosno njihova kinetička energija. Što je brzina čestica veća, to je veća i mogućnost da se čestice međusobno više udalje. Stoga s porastom temperature opada potencijalna energija (slika 1.14) i u skladu s tim, slaba privlačna sila među

¹⁷ Johannes Diderik van der Waals (1837-1923), nizozemski znanstvenik. Zbog svog doprinosa vezanog uz jednačbu stanja plinova i tekućina 1910. godine dobiva Nobelovu nagradu iz fizike.

¹⁸ Dublje objašnjenje odbijanja čestica na malim udaljenostima dala je tek kvantna fizika.

česticama sve više slabi. Prema tome, za efektivni broj čestica vrijedi $N_{ef} = N (1 - C n / T V)$, gdje je N stvarni broj molekula ili atoma plina, T je temperatura plina, a C je konstanta. Pri tom ćemo pretpostaviti da je $C n / T V \ll 1$.

Jednadžbu stanja realnog plina možemo formalno napisati polazeći od jednadžbe stanja idealnog plina (1.5.10), ali ćemo sada umjesto stvarnog volumena plina imati efektivni volumen, a u mjesto stvarnog broja molekula ili atoma efektivni broj. Tako dobivamo

$$p V_{ef} = N_{ef} k T. \quad (1.5.17)$$

Uvrštavanjem $V_{ef} = V - n b$ i $N_{ef} = N (1 - C n / T V)$ dobivamo

$$p (V - n b) = N (1 - C n / T V) k T, \quad (1.5.18)$$

gdje je $k = R^* / N_A$ Boltzmannova konstanta. Odatle je $N k = N R^* / N_A = n R^*$, gdje je n broj kmolova plina, pa jednadžbu (1.5.18) nakon množenja s $(1 + C n / T V)$ možemo pisati

$$p (V - n b) (1 + C n / T V) = n R^* [1 - (C n / T V)^2] T. \quad (1.5.19)$$

Budući je $C n / T V \ll 1$, član $(C n / T V)^2$ možemo zanemariti, pa jednadžba stanja realnog plina prelazi u

$$(p + C p n / T V) (V - n b) = n R^* T. \quad (1.5.20)$$

Umjesto omjera p / T u članu $C p n / T V$ uvrstiti ćemo približnu vrijednost dobivenu na temelju jednadžbe stanja idealnog plina (1.5.9). Uvrštavanjem $p / T = n R^* / V$ u (1.5.20) i supstitucijom $a = C R^*$, gdje je a konstanta, dobivamo van der Waalsovju jednadžbu

$$(p + a n^2 / V^2) (V - n b) = n R^* T, \quad (1.5.21)$$

gdje su vrijednosti van der Waalsovih konstanti a i b za neke tvari prikazane u tablici 1.3. Za razliku od jednadžbe stanja idealnog plina, van der Waalsova jednadžba je jednadžba trećeg stupnja u volumenu. Drugim riječima, jednoj vrijednosti tlaka pripadaju tri različite vrijednosti volumena. Ako izoterme određene na temelju van der Waalsove jednadžbe prikažemo u (V, p) dijagramu, dobiti ćemo sliku poput slike 1.15, izuzev dijelova izotermi koje se nalaze unutar osjenčanog područja. U osjenčanom području izoterme određene iz van der Waalsove jednadžbe imaju oblik poput izoterme T prikazane na slici crtkanom krivuljom. Na dijelu te krivulje, počev od točke A pa do točke B, pri porastu volumena povećava se i tlak. Takvo ponašanje nije stvarno fizikalno ponašanje plina, već je odraz aproksimativnosti Waalsove jednadžbe. Stvarne izoterme unutar osjenčanog područja paralelne su s x osi, te se unutar tog područja tlak ne mijenja porastom volumena. Izoterma T_c je takva da u točki (V_c, p_c) ima infleksiju. Ta točka naziva se kritična točka, a T_c , V_c i p_c su kritične vrijednosti temperature, tlaka i volumena. Za temperature više od kritične van der Waalsova jednadžba dobro opisuje ponašanje realnog plina. Vrijednosti kritičnog tlaka i temperature za neke od plinova navedene su u tablici 1.3.

Van der Waalsovju jednadžbu (1.5.21) možemo dalje preurediti tako da na lijevoj strani prikažemo tlak plina

$$p = n R^* T / (V - n b) - a n^2 / V^2. \quad (1.5.22)$$

Iz gornje jednadžbe vidimo da je tlak plina p umanjen za veličinu $a(n^2/V^2)$ zbog privlačenja molekula ili atoma plina. Član $a(n^2/V^2)$ naziva se tlakom kohezije. Nadalje, iz iste jednadžbe možemo odrediti i kritični volumen, temperaturu i tlak (T_c , V_c i p_c). Za točku infleksije mora vrijediti $(\partial p / \partial V)_{T=T_c} = 0$ i $(\partial^2 p / \partial V^2)_{T=T_c} = 0$. Odatle je

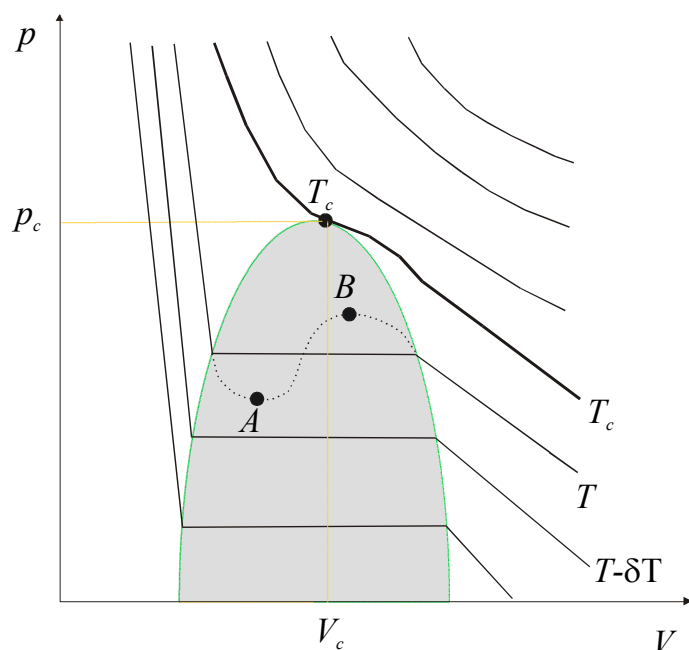
$$(\partial p / \partial V)_T = -n R^* T_c / (V_c - n b)^2 + 2 a n^2 / V_c^3 = 0, \quad (1.5.23)$$

$$(\partial^2 p / \partial V^2)_T = 2 n R^* T_c / (V_c - n b)^3 - 6 a n^2 / V_c^4 = 0. \quad (1.5.24)$$

Pomnožimo jednadžbu (1.5.23) s $2 / (V_c - n b)$ i zatim je pribrojimo jednadžbi (1.5.24). Dobivamo

$$4 a n^2 / [V_c^3(V_c - n b)] - 6 a n^2 / V_c^4 = 0, \quad (1.5.25)$$

iz čega slijedi $V_c = 3 n b$. Uvrstimo $V_c = 3 n b$ u jednadžbu (1.5.23) i zatim odredimo kritičnu temperaturu $T_c = 8 a / (27 b R^*)$. Kritični tlak možemo odrediti uvrštavanjem V_c i T_c u van der Waalsovju jednadžbu (1.5.22). Tako dobivamo $p_c = a / (27 b^2)$.



Slika 1.15. Izoterme određene iz van der Waalsove jednadžbe prikazane u (V, p) dijagramu. Budući da je van der Waalsova jednadžba jednadžba trećeg stupnja u volumenu, izoterme su krivulje trećeg stupnja (jednoj vrijednosti tlaka pripadaju tri vrijednosti volumena), pa unutar osjenčanog područja imaju oblik poput onog prikazanog za temperaturu T crtkanom krivuljom. To znači da duž intervala AB tlak raste pri porastu volumena. Takvo ponašanje izoterme odraz je aproksimativnosti van der Waalsove jednadžbe, te ne odgovara fizikalnoj realnosti. Stvarne izoterme unutar osjenčanog područja imaju takav oblik da pri porastu volumena tlak ostaje konstantan, kao što je prikazano punim linijama unutar osjenčanog područja. Kritična točka (V_c, p_c) na izotemi T_c je točka infleksije.

Pomnožimo van der Waalsovú jednadžbu (1.5.22) s volumenom V i preuredimo

$$pV = nR^*T \left[\frac{V}{V - nb} - \frac{a}{R^*TV} \right] = nR^*T \left[(1 - nb/V)^{-1} - (n/V)(a/R^*T) \right]. \quad (1.5.26)$$

Budući je $V \gg nb$, ispunjen je uvjet $|nb/V| < 1$, pa član $(1 - nb/V)^{-1}$ možemo razviti u red¹⁹ i zanemariti više potencije od nb/V . Tako dobivamo $(1 - nb/V)^{-1} \approx 1 + nb/V$. Nakon uvrštavanja u jednadžbu (1.5.26) i sređivanja dobivamo

$$pV = nR^*T \left[1 + (n/V)(nb - a/R^*T) \right]. \quad (1.5.27)$$

Što je omjer broja kmolova plina i volumena plina n/V manji, gustoća plina je manja, a jednadžba (1.5.27) je to sličnija jednadžbi stanja idealnog plina.

Tablica 1.3. Van der Waalsove konstante a i b , kritični tlak (p_c) i kritična temperatura (T_c) za neke tvari.

tvar		a (J m ³ /mol ²)	b (m ³ /mol)	p_c (Pa)	T_c (K)
	zrak	0.1358	$3.64 \cdot 10^{-5}$	$3.77 \cdot 10^6$	133
N ₂	dušik	0.1361	$3.85 \cdot 10^{-5}$	$3.39 \cdot 10^6$	126.2
He	helij	0.00341	$2.34 \cdot 10^{-5}$	$0.23 \cdot 10^6$	5.2
CO ₂	ugljičkov dioksid	0.3643	$4.27 \cdot 10^{-5}$	$7.39 \cdot 10^6$	304.2
H ₂	vodik	0.0247	$2.65 \cdot 10^{-5}$	$1.30 \cdot 10^6$	33.2
H ₂ O	vodena para	0.5507	$3.04 \cdot 10^{-5}$	$22.09 \cdot 10^6$	647.3
NH ₃	amonijak	0.4233	$3.73 \cdot 10^{-5}$	$11.28 \cdot 10^6$	406
CCl ₂ F ₂	freon	1.078	$9.98 \cdot 10^{-5}$	$4.12 \cdot 10^6$	385

Zadaci

1.5.1. Izračunaj specifičnu plinsku konstantu za suhi zrak, te prividnu molekularnu masu zraka ako je poznat sastav zraka (tablica). Dalje odredi gustoću zraka pri standardnim uvjetima ($T = 273.15$ K, $p = 1013.250$ hPa, $V_m = 22.414$ m³ kmol⁻¹). Univerzalna plinska konstanta je $R^* = 8314$ J kmol⁻¹ K⁻¹.

Plin	Udio mase (%)	Molekularna masa (kg kmol ⁻¹)
N ₂	75.52	28.02
O ₂	23.15	32.00
Ar	1.28	39.44
CO ₂	0.05	44.00

¹⁹ Za $|x| < 1$ funkciju $(1 - x)^{-1}$ možemo razviti u red $(1 - x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$

(Rješenje: Prividna molekularna masa zraka je $M = 28.967 \text{ kg kmol}^{-1}$. Dalje se dobije $R_d = R^* / M = 287.02 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ i $\rho_d = M / V_m = 1.292 \text{ kg m}^{-3}$.)

- 1.5.2.** Uzorak zraka mase 50 g nalazi se pri tlaku od 1000 hPa i temperaturi od 180 K. Uzorku se izobarno dodaje toplina sve dok mu volumen ne ekspanrira za 10 %. Kolika je temperatura zraka nakon ekspanzije? **(Rješenje:** 198 K)
- 1.5.3.** Koliko se molekula nalazi u kubičnom centimetru zraka pri standardnim uvjetima ($T = 273.15 \text{ K}$, $p = 1013,250 \text{ hPa}$)? **(Rješenje:** Broj molekula u kubičnom centimetru zraka je $n = N_A \cdot V / V_m = 2.69 \cdot 10^{19}$.)
- 1.5.4.** Izračunaj prividnu molekularnu masu atmosfere Venere, ako se njezin volumen sastoji od 95 % ugljičnog dioksida i 5 % molekularnog dušika. Koja je specifična plinska konstanta takve atmosfere? Atomska masa ugljika je 12, kisika 16, a dušika 14. **(Rješenje:** $M = 43.2 \text{ kg kmol}^{-1}$. Dalje se dobije $R = R^* / M = 192.45 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.)
- 1.5.5.** Kolika je gustoća zraka pri standardnim uvjetima ($T = 273.15 \text{ K}$, $p = 1013.250 \text{ hPa}$) ako je prividna molekularna masa smjese zraka $28.96 \text{ kg kmol}^{-1}$? **(Rješenje:** 1.292 kg m^{-3})
- 1.5.6.** Pokaži da se jednačba stanja idealnog plina koja je izvedena za jediničnu masu $p\alpha = R T$ može za proizvoljnu masu plina m pisati u obliku $p V = n R^* T$. **(Rješenje:** Pomnožimo jednačbu stanja idealnog plina koja je izvedena za jedinicu mase s proizvoljnom masom m , gdje je $m = n M$, n je broj kilomolova koji se nalazi u masi plina m , koja zauzima volumen V , a M je molekularna masa plina. Dobije se $p\alpha n M = n M R T$. Uvrstimo zatim $M R = R^*$ i $\alpha = V / m$. Dobije se $pV n M / m = n R^* T$. Budući je $m = n M$, na kraju se dobije $p V = n R^* T$.)
- 1.5.7.** Polazeći od Clapeyronovog oblika jednačbe stanja idealnog plina $p V = n R^* T$ pokaži da se ista jednačba može pisati u obliku $p V = N k T$, gdje je N broj molekula ili atoma u volumenu plina V , a k je Boltzmannova konstanta. **(Rješenje:** Ukupan broj molekula ili atoma plina je $N = n N_A$, gdje je n broj kilomolova plina, a N_A je Avogadrov broj. Odatle je $n = N / N_A$. Uvrstimo n u Clapeyronovu jednačbu uz $k = R^* / N_A$.)
- 1.5.8.** Izračunaj kritični tlak, temperaturu i volumen za 3 mola zraka ako su van der Waalove konstante $a = 0.1358 \text{ J m}^3 / \text{mol}^2$ i $b = 3.64 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 / \text{mol}$. Univerzalna plinska konstanta je $R^* = 8314 \text{ J kmol}^{-1} \text{ K}^{-1}$. **(Rješenje:** Za točku infleksije na izotermi T_c vrijedi $V_c = 3 n b$, $T_c = 8 a / (27 b R^*)$ i $p_c = a / (27 b^2)$, gdje je n broj molova plina. Odatle je $V_c = 3.276 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$, $T_c = 132.958 \text{ K}$ i $p_c = 3.796 \cdot 10^6 \text{ Pa}$.)

1.6 Jednačba kontinuiteta

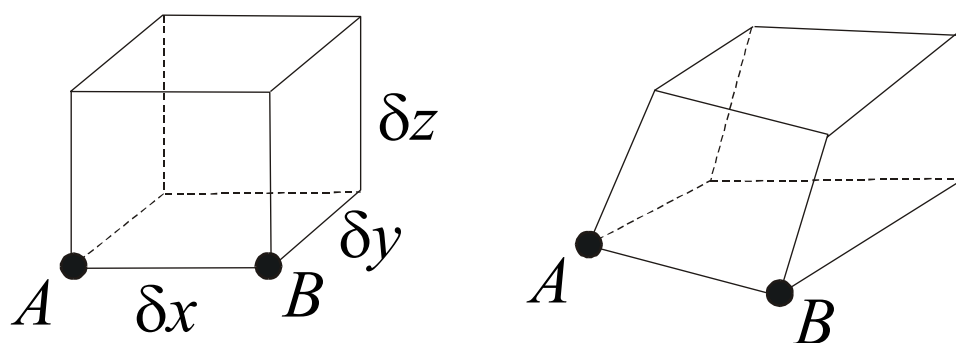
Zakon sačuvanja mase jedan je od tri osnovna fizikalna zakona koji upravljaju gibanjima u atmosferi. (Preostala dva su zakon sačuvanja impulsa i zakon sačuvanja energije.) Zakon sačuvanja mase formalno prikazujemo jednačbom kontinuiteta. Tu jednačbu možemo izvesti na dva načina: Lagrangeovim i Eulerovim pristupom. U prvom pratimo promjene

gustoće **materijalne česti** ili **materijalnog elementa** fluida²⁰ unutar kontrolnog volumena, koji je zbog strujanja fluida promjenjiv. Drugim riječima, promjene pratimo prateći gibanje materijalnog elementa, odnosno pratimo ih u Lagrangeovom sustavu. Eulerovim pristupom promjene mase pratimo unutar fiksnog elementa volumena, odnosno pratimo ih u Eulerovom sustavu.

1.6.1. Lagrangeov način

Promatramo infinitezimalno mali materijalni element fluida fiksne mase δM , koji je u početnom trenutku pravokutan (Kartezijev element), te zauzima volumen $\delta V = \delta x \delta y \delta z$. Materijalni element nalazi se u polju strujanja, te će se zbog toga nakon kratkog vremena deformirati (slika 1.16). Volumen će se zbog strujanja relativno promijeniti za iznos

$$\frac{1}{\delta x \delta y \delta z} \frac{D}{Dt} (\delta x \delta y \delta z) = \frac{1}{\delta x} \frac{D}{Dt} (\delta x) + \frac{1}{\delta y} \frac{D}{Dt} (\delta y) + \frac{1}{\delta z} \frac{D}{Dt} (\delta z). \quad (1.6.1)$$



Slika 1.16. Materijalni element fluida, koji je u početku bio pravokutan (lijevo) deformira se zbog polja strujanja (desno).

Pogledajmo čemu je jednak prvi član s desne strane jednadžbe (1.6.1). Položaj točaka A i B nije funkcija prostora (x, y, z) , već ovisi samo o vremenu t . Stoga je

$$\frac{1}{\delta x} \frac{D}{Dt} (\delta x) = \frac{1}{\delta x} \frac{D}{Dt} [x(B) - x(A)] = \frac{1}{\delta x} \left[\frac{\partial x(B)}{\partial t} - \frac{\partial x(A)}{\partial t} \right] = \frac{1}{\delta x} [u(B) - u(A)],$$

gdje su $u(B)$ i $u(A)$ x -komponente brzine u točkama B i A . Budući da je δx infinitezimalno malen to je

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\delta x} \frac{D}{Dt} (\delta x) = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Slično dobivamo i za infinitezimalno male δy i δz

²⁰ Materijalna čest ili materijalni element uvijek se sastoji od istih čestica, te mu je stoga masa fiksna.

$$\lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\delta y} \frac{D}{Dt}(\delta y) = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{i} \quad \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\delta z} \frac{D}{Dt}(\delta z) = \frac{\partial w}{\partial z},$$

gdje su v i w komponente brzine fluida u y i z smjeru. Odatle za $\delta V \rightarrow 0$ jednažba (1.6.1) prelazi u

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{\delta x \rightarrow 0 \\ \delta y \rightarrow 0 \\ \delta z \rightarrow 0}} \frac{1}{\delta x \delta y \delta z} \frac{D}{Dt}(\delta x \delta y \delta z) &= \lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\delta V} \frac{D}{Dt}(\delta V) = \\ &= \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\delta x} \frac{D}{Dt}(\delta x) + \lim_{\delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\delta y} \frac{D}{Dt}(\delta y) + \lim_{\delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\delta z} \frac{D}{Dt}(\delta z) = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Budući da je $\delta V = \delta M / \rho$, gdje je ρ gustoća materijalnog elementa fluida, gornju jednažbu možemo pisati ovako

$$\lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\delta V} \frac{D}{Dt}(\delta V) = \frac{1}{\left(\frac{\delta M}{\rho}\right)} \frac{D\left(\frac{\delta M}{\rho}\right)}{Dt} = \frac{\rho}{\delta M} \left(\frac{-\delta M}{\rho^2}\right) \frac{D\rho}{Dt} = \frac{-1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} = \nabla \cdot \mathbf{v}.$$

Tako dobivamo jednažbu kontinuiteta

$$\frac{1}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} + \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.6.2)$$

gdje veličina $\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ prikazuje **divergenciju brzine**, a $D\rho / Dt$ je totalni (Lagrangeov) diferencijal gustoće.

1.6.2. Eulerov način

Izvedimo sada jednažbu kontinuiteta promatrajući fiksni (Eulerov) infinitezimalno mali element volumena koji se nalazi u polju strujanja (slika 1.17). Zbog strujanja fluida, u takav element volumena kontinuirano ulazi i iz njega kontinuirano izlazi neka masa fluida. Pogledajmo najprije neto dotok mase koji postoji samo zbog x -komponente strujanja. Kroz lijevu plohu, čija je površina $\delta y \delta z$, u jedinici vremena u volumen uđe masa fluida $A = [\rho u - (\delta x / 2) \partial(\rho u) / \partial x] \delta y \delta z$. Istovremeno, kroz desnu plohu u jedinici vremena iz volumena isticke masa fluida $B = [\rho u + (\delta x / 2) \partial(\rho u) / \partial x] \delta y \delta z$. Neto dotok mase u jedinici vremena, koji postoji zbog x -komponente strujanja, jednak je masi koja u volumen uđe u jedinici vremena (A) umanjenoj za masu koja izađe iz volumena u jedinici vremena (B)

$$\begin{aligned} A - B &= [\rho u - (\delta x / 2) \partial(\rho u) / \partial x] \delta y \delta z - [\rho u + (\delta x / 2) \partial(\rho u) / \partial x] \delta y \delta z = \\ &= -[\partial(\rho u) / \partial x] \delta x \delta y \delta z = -[\partial(\rho u) / \partial x] \delta V. \end{aligned}$$

Analogno možemo odrediti neto dotoke mase u volumen u jedinici vremena, koji postoje zbog komponenti strujanja u y i z smjeru, $-\left[\partial(\rho v) / \partial y\right] \delta V$ i $-\left[\partial(\rho w) / \partial z\right] \delta V$. Odatle je ukupna promjena mase po jedinici vremena, koja postoji zbog trodimenzionalnog strujanja fluida

$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \delta V - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \delta V - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} \delta V = -\delta V \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}).$$

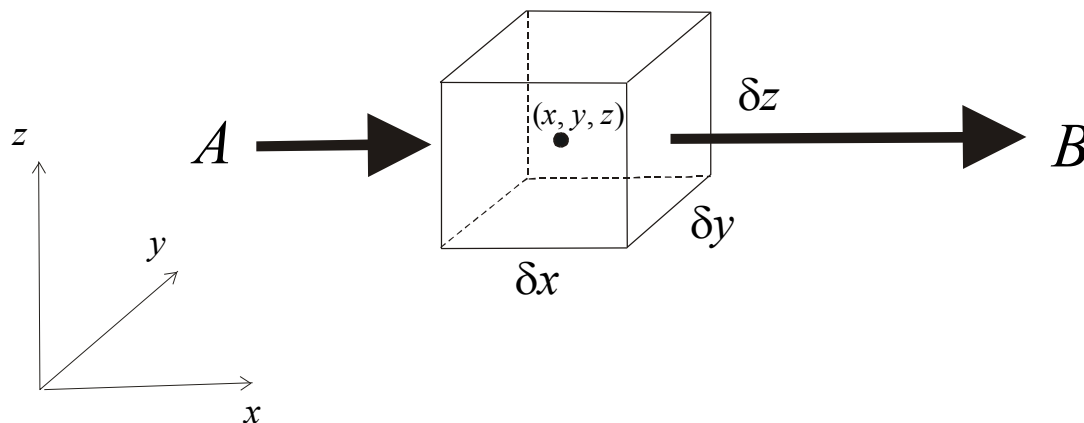
Podijelimo li gornji izraz s infinitezimalno malim fiksnim volumenom δV , dobivamo vremensku promjenu mase po jedinici volumena

$$-\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} - \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} - \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}). \quad (1.6.3)$$

Budući da je gustoća $\rho = \delta M / \delta V$ jednaka masi po jedinici volumena, gdje je δM masa elementa volumena, to je vremenska promjena mase po jedinici volumena jednaka vremenskoj promjeni gustoće $\partial \rho / \partial t$, što je dalje jednako izrazu (1.6.3). Tako dobivamo još jedan oblik jednačbe kontinuiteta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}), \quad (1.6.4)$$

u kojem je promjena gustoće prikazana preko lokalne promjene $\partial \rho / \partial t$.

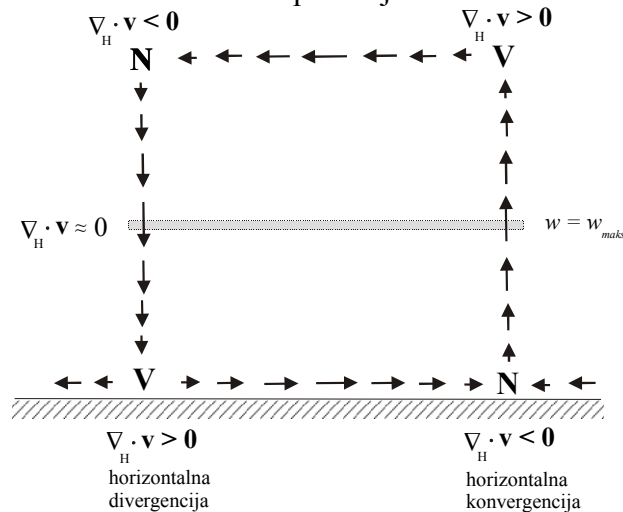


Slika 1.17. Neto dotok mase u fiksni (Eulerov) element volumena, koji postoji zbog x-komponente strujanja fluida.

1.6.3. Vertikalne ćelije

Kao posljedica očuvanja mase fluida, u atmosferi se pojavljuju zatvorene **vertikalne ćelije**. Te ćelije su nepravilnog i nestalnog oblika, a trajnije su one većih dimenzija, poput ćelija koje se protežu duž cijele troposfere (slika 1.18). U području u kojem postoji horizontalna divergencija strujanja ($\nabla_H \cdot \mathbf{v} > 0$), masa zraka mora se kompenzirati vertikalnom konvergencijom ($\partial w / \partial z < 0$). Suprotno tome, u području horizontalne konvergencije ($\nabla_H \cdot \mathbf{v} <$

0) mora postojati vertikalna divergencija ($\partial w / \partial z > 0$) strujanja. Kompenzacija divergencije konvergencijom i konvergencije divergencijom rezultira cirkuliranjem zraka u vertikalnoj ravnini duž zatvorene ćelije. U području horizontalne divergencije formira se polje visokog tlaka (V). Njegovo postojanje pri tlu dodatno podržava spuštavanje zraka iz visine ($w < 0$). U području horizontalne konvergencije formira se polje niskog tlaka (N). Njegovo postojanje pri tlu dodatno podržavaju uzlazna strujanja ($w > 0$). Negdje u sredini troposfere (na tlakovima od oko 500 do 600 hPa, odnosno u umjerenim širinama na visinama od oko 5 – 6 km), horizontalna divergencija mora biti približno jednaka nuli, a magnituda vertikalne brzine mora biti maksimalna. To područje nazivamo bezdivergentni nivo.



Slika 1.18. Vertikalna ćelija u troposferi. Horizontalna divergencija strujanja kompenzira se vertikalnom konvergencijom i suprotno, horizontalna konvergencija kompenzira se vertikalnom divergencijom. Približno u sredini troposfere (na visinama na kojima je tlak \approx 500 – 600 hPa) magnitude vertikalnih brzina su maksimalne. Ovakva cirkulaciona ćelija podržava u području horizontalne divergencije polje visokog tlaka (V), a u području horizontalne konvergencije polje niskog tlaka (N).

1.6.4. Nestlačivi fluid

Ako je fluid nestlačiv, onda se gustoća česti, koja se giba u polju strujanja, ne mijenja. To znači da za nestlačiv fluid vrijedi

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0. \quad (1.6.5)$$

Stoga zbog jednadžbe kontinuiteta (1.6.2) mora biti ispunjeno

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1.6.6)$$

što drugim riječima znači da je fluid trodimenzionalno nedivergentan. Voda je gotovo nestlačiva, pa je jednadžba (1.6.6) jako dobra aproksimacija za strujanja u oceanu. Za razliku od oceana, atmosfera je stlačiva, što drugim riječima znači da se gustoća zraka mijenja zbog utjecanja ili istjecanja zraka u u promatrani volumen zraka, odnosno zbog trodimenzionalne divergencije brzine. Gibanja, pri kojima dolazi do promjene gustoće zraka, događaju se u atmosferi vrlo brzo. Primjer jednog od takvih gibanja su zvučni valovi. Međutim, zvučni

valovi ne utječu na vrijeme. Stoga pri proučavanju meteoroloških procesa vrlo često pretpostavljamo da je atmosfera nestlačiva. Na taj način iz rješenja jednadžbi, koje opisuju atmosferska gibanja, eliminiramo zvučne valove, koji za meteorologa predstavljaju šum ili smetnju.

Pretpostavka o nestlačivosti atmosfere naročito je opravdana ako pretpostavimo da je atmosfera **plitak fluid**, što je s obzirom na dimenzije Zemlje razumna pretpostavka (srednji radijus Zemlje je $R_z = 6371$ km). Tim više, za meteorološke procese najvažniji je njen najdonji sloj od prvih ~ 10 km (troposfera), u kojoj se nalazi oko 80 % ukupne mase atmosfere. Ako je fluid plitak, efekte stlačivosti možemo zanemariti, budući da vertikalni pomaci česti u plitkom fluidu ne mogu biti veliki, te stoga ne mogu uzrokovati bitne promjene gustoće česti. Tako na primjer, pomak atmosferske česti duž vertikale, koji odgovara promjeni tlaka od 100 hPa, uzrokuje promjenu gustoće česti od oko 10 %. Slično vrijedi i za horizontalne pomake česti. Horizontalne varijacije tlaka na sinoptičkoj skali su reda veličine ~ 10 hPa duž ~ 1000 km udaljenosti. Ako se čest pomakne duž horizontale za udaljenost koja odgovara promjeni tlaka od 50 hPa (što može biti i više tisuća kilometara), gustoća će joj se promijeniti za samo oko 5 %.

Uvođenje aproksimacija u jednadžbe općenito ovisi o problemu koji istražujemo. Katkad neko pojednostavljenje pri istraživanju jednog problema jako dobro opisuje realno stanje, dok je istovremeno isto pojednostavljenje potpuno neprihvatljivo pri opisu drugog fenomena. Tako u našim istraživanjima često možemo pretpostaviti da je atmosfera nestlačiva. Tada umjesto jednadžbe kontinuiteta koristimo jednadžbu (1.6.6), koja je jednostavnijeg oblika. Međutim, u slučaju duboke konvekcije ta aproksimacija ne vrijedi, već umjesto jednadžbe kontinuiteta (1.6.4) koristimo pojednostavljenu jednadžbu

$$\nabla \cdot (\rho(z)\mathbf{v}) = 0, \quad (1.6.7)$$

u kojoj uvažavamo prostorne varijacije gustoće, ali pretpostavljamo da je gustoća 'osnovnog stanja' $\rho(z)$ samo funkcija visine.

1.7 Jednadžba sačuvanja skalarne veličine

1.7.1. Jednadžba sačuvanja bez difuzije

Masa materijalne česti je očuvana. Prema tome masa je konzervativna veličina za materijalnu čest. Postoje i druge skalarne veličine koje su u materijalnoj česti fluida očuvane (na primjer masa soli u materijalnoj česti oceana, mase onečišćujućih tvari u materijalnoj česti atmosfere ili oceana, masa vodene pare u materijalnoj česti vlažnog zraka i tako dalje), a nazivamo ih **konzervativne veličine**. Jednadžbu, koja opisuje sačuvanje neke konzervativne skalarne veličine, možemo odrediti poput jednadžbe kontinuiteta. Ovdje ćemo je izvesti Eulerovim pristupom. Drugim riječima, pratiti ćemo **tok (fluks)** promatrane veličine kroz fiksni volumen.

Definirajmo vektor toka \mathbf{F} skalarne veličine po jedinici površine, koja je okomita na vektor \mathbf{F} . Budući je \mathbf{F} tok skalarne veličine po jedinici površine, to znači da je \mathbf{F} jednak gustoći toka (gustoći fluksa) skalarne veličine. Pretpostavimo dalje da tok skalarne veličine postoji samo zbog gibanja fluida. Drugim riječima, to znači da zanemarujemo molekularnu difuziju, a uvažavamo samo tok veličine zbog advekcije. Neka je Q_v količina skalarne

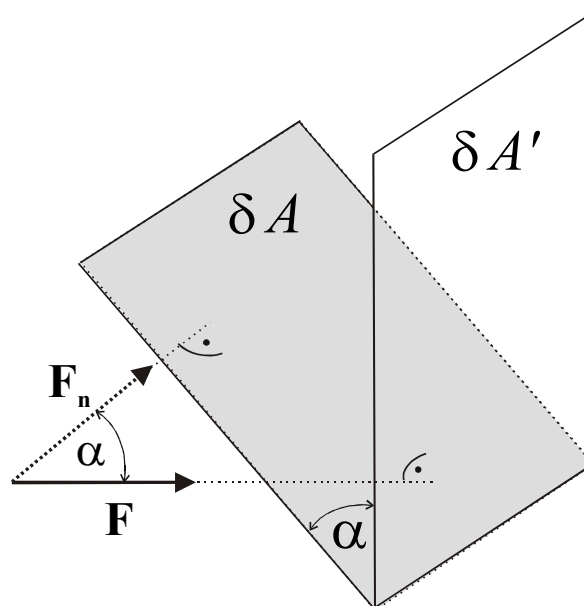
veliĉine sadržana u jedinici volumena. Gustoća toka skalarne veliĉine, koja postoji zbog advekcije, mora ovisiti o koliĉini skalarne veliĉine po jedinici volumena i o brzini fluida

$$\mathbf{F} = Q_v \mathbf{v}, \quad (1.7.1)$$

gdje je \mathbf{v} vektor brzine fluida.

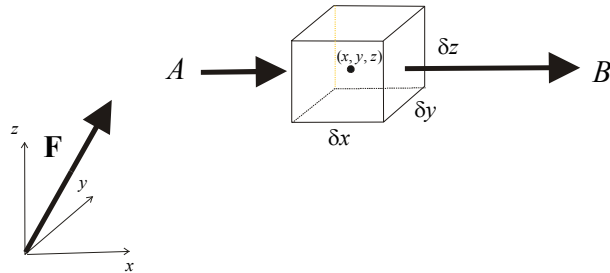
Ako element površine δA nije okomit na vektor gustoće toka \mathbf{F} (slika 1.19), tok kroz površinu δA jednak je $F\delta A' = F\delta A \cos \alpha$, gdje je F modul vektora \mathbf{F} . Odatle je gustoća toka kroz promatranu površinu δA jednaka komponenti gustoće toka koja je okomita na samu površinu

$$F \cos \alpha = F_n. \quad (1.7.2)$$



Slika 1.19. Gustoća toka konzervativne veliĉine kroz plohu δA jednaka je komponenti vektora gustoće toka \mathbf{F}_n koja je okomita na plohu δA ($F_n = F \cos \alpha$).

Promatramo Kartezijev element volumena (slika 1.20). Neto tok skalarne veličine u x -smjeru jednak je x -komponenti toka skalarne veličine u element volumena (A), umanjenoj za x -komponentu toka iz elementa volumena (B), gdje je $A = [F_x - (\delta x / 2) \partial F_x / \partial x] \delta y \delta z$ i $B = [F_x + (\delta x / 2) \partial F_x / \partial x] \delta y \delta z$. Odatle je neto tok kroz plohu $\delta y \delta z$ (neto tok u x -smjeru) $A - B = -(\partial F_x / \partial x) \delta x \delta y \delta z$. Na isti način dobivamo neto tok u y -smjeru $-(\partial F_y / \partial y) \delta x \delta y \delta z$, odnosno neto tok u z -smjeru $-(\partial F_z / \partial z) \delta x \delta y \delta z$, gdje je $\delta x \delta y \delta z$ volumen δV promatranog elementa.



Slika 1.20. Neto tok konzervativne veličine u Kartezijev (pravokutni) element volumena, koji postoji zbog x -komponente vektora gustoće toka \mathbf{F} .

Ukupni neto tok jednak je zbroju neto tokova u sva tri smjera

$$-(\partial F_x / \partial x) \delta V - (\partial F_y / \partial y) \delta V - (\partial F_z / \partial z) \delta V.$$

Odatle je neto tok skalarne veličine po jedinici volumena

$$-\partial F_x / \partial x - \partial F_y / \partial y - \partial F_z / \partial z = -\nabla \cdot \mathbf{F}.$$

Budući je Q_v količina skalarne veličine koja se nalazi u jedinici volumena, vremenska promjena promatrane skalarne veličine po jedinici volumena jednaka je $\partial Q_v / \partial t$. Tu promjenu uzrokuje samo neto tok skalarne veličine u jedinični volumen $-\nabla \cdot \mathbf{F}$. Stoga mora vrijediti $\partial Q_v / \partial t = -\nabla \cdot \mathbf{F}$, iz čega slijedi jednadžba sačuvanja skalarne veličine

$$\partial Q_v / \partial t + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0. \quad (1.7.3)$$

Primijenimo jednadžbu sačuvanja skalarne veličine (koja općenito vrijedi za bilo koju konzervativnu skalarnu veličinu) na masu m . U tom slučaju količina skalarne veličine sadržana u jedinici volumena je $Q_v = m / V = \rho$, gdje je V volumen, a ρ gustoća. Odatle je vektor gustoće toka skalarne veličine, koji je definiran jednadžbom (1.7.1), jednak $\mathbf{F} = Q_v \mathbf{v} = \rho \mathbf{v}$. Uvrstimo Q_v i \mathbf{F} u jednadžbu (1.7.3). Tako dobivamo već poznatu jednadžbu kontinuiteta (vidi jednadžbu (1.6.4))

$$\partial \rho / \partial t + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (1.7.4)$$

Primijenimo sada jednadžbu sačuvanja skalarne veličine na sol u oceanu. Definirajmo salinitet s kao masu otopljenih soli po jedinici mase morske vode $s = m_s / m_w$, gdje je m_s masa soli, a m_w masa morske vode. Budući da je $m_w = \rho_w V$, gdje je ρ_w gustoća morske vode, a V je volumen, to je količina skalarne veličine sadržana u jedinici volumena u slučaju soli u oceanu $Q_v = m_s / V = s m_w / V = s \rho_w V / V = s \rho_w$. Odatle je vektor gustoće toka soli $\mathbf{F} = s \rho_w \mathbf{v}$, pa jednadžba sačuvanja soli u oceanu glasi

$$\partial (\rho_w s) / \partial t + \nabla \cdot (\rho_w s \mathbf{v}) = 0. \quad (1.7.5)$$

Slično, jednadžbu (1.7.3) možemo primijeniti i na vodenu paru u atmosferi. Definirajmo specifičnu vlažnost q kao masu vodene pare po jedinici mase vlažnog zraka $q = m_v / m_m$, gdje je m_v masa vodene pare, a m_m masa vlažnog zraka. Budući da je masa vlažnog zraka jednaka umnošku gustoće vlažnog zraka ρ_m i volumena V , to je količina vodene pare sadržana u jedinici volumena $Q_v = m_v / V = m_m q / V = \rho_m V q / V = \rho_m q$, a vektor gustoće toka vodene pare je $\mathbf{F} = \rho_m q \mathbf{v}$. Uvrstimo Q_v i \mathbf{F} u jednadžbu sačuvanja skalarne veličine (1.7.3). Dobivamo jednadžbu sačuvanja vodene pare

$$\partial (\rho_m q) / \partial t + \nabla \cdot (\rho_m q \mathbf{v}) = 0. \quad (1.7.6)$$

Zanemarimo li molekularnu difuziju, jednadžbe (1.7.5) i (1.7.6) možemo izvesti i na drugi (Lagrangeov) način, polazeći od definicije materijalnog elementa. Izvedimo jednadžbu sačuvanja saliniteta. Promatramo materijalni element morske vode, koji se nalazi u polju strujanja u oceanu. Budući da se materijalni element uvijek sastoji od istih čestica, totalni (materijalni ili procesni) diferencijal saliniteta, bez obzira na strujanje, mora biti jednak nuli $Ds / Dt = 0$. Pomnožimo tu jednadžbu s gustoćom morske vode ρ_w , a totalni diferencijal Ds / Dt rastavimo na lokalnu i advektivnu promjenu na način opisan jednadžbom (1.4.3). Tako dobivamo

$$\begin{aligned} \rho_w Ds / Dt &= \rho_w \partial s / \partial t + \rho_w u \partial s / \partial x + \rho_w v \partial s / \partial y + \\ &+ \rho_w w \partial s / \partial z = 0, \end{aligned} \quad (1.7.7)$$

gdje su u , v i w komponente brzine u x , y i z smjeru. Uvrstimo u (1.7.7)

$$\begin{aligned} \rho_w \partial s / \partial t &= \partial (\rho_w s) / \partial t - s \partial \rho_w / \partial t, \\ \rho_w u \partial s / \partial x &= \partial (\rho_w u s) / \partial x - s \partial (\rho_w u) / \partial x, \\ \rho_w v \partial s / \partial y &= \partial (\rho_w v s) / \partial y - s \partial (\rho_w v) / \partial y, \\ \rho_w w \partial s / \partial z &= \partial (\rho_w w s) / \partial z - s \partial (\rho_w w) / \partial z. \end{aligned}$$

Tako dobivamo

$$\begin{aligned} \partial (\rho_w s) / \partial t - s \partial \rho_w / \partial t + \partial (\rho_w u s) / \partial x - s \partial (\rho_w u) / \partial x + \\ + \partial (\rho_w v s) / \partial y - s \partial (\rho_w v) / \partial y + \partial (\rho_w w s) / \partial z - s \partial (\rho_w w) / \partial z = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \partial(\rho_w s) / \partial t + \partial(\rho_w u s) / \partial x + \partial(\rho_w v s) / \partial y + \partial(\rho_w w s) / \partial z - \\
&\quad - s [\partial \rho_w / \partial t + \partial(\rho_w u) / \partial x + \partial(\rho_w v) / \partial y + \partial(\rho_w w) / \partial z] = \\
&= \partial(\rho_w s) / \partial t + \nabla \cdot (\rho_w s \mathbf{v}) - s [\partial \rho_w / \partial t + \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{v})] = 0.
\end{aligned} \tag{1.7.8}$$

Izraz u uglatoj zagradi jednadžbe (1.7.8) prikazuje lijevu stranu jednadžbe kontinuiteta (1.7.4), te stoga mora vrijediti $[\partial \rho_w / \partial t + \nabla \cdot (\rho_w \mathbf{v})] = 0$. Tako ponovo dobivamo jednadžbu sačuvanja soli u oceanu (1.7.5)

$$\partial(\rho_w s) / \partial t + \nabla \cdot (\rho_w s \mathbf{v}) = 0. \tag{1.7.9}$$

Na potpuno jednak način možemo izvesti i jednadžbu sačuvanja vodene pare u atmosferi (1.7.6) (vidi zadatak 1.7.1).

1.7.2. Jednadžba s molekularnom difuzijom

Neka veličina može se u fluidu prenositi na više načina: advekcijom, molekularnom i turbulentnom difuzijom. Advekcijom se veličina prenosi s mjesta na mjesto zbog strujanja fluida, za koje pretpostavljamo da nije turbulentno. Možemo je ilustrirati ovim primjerom. Zamislimo da smo u korito rijeke, u kojoj nema turbulentnih vrtloga, ulili tintu. Tinta će se zbog toka rijeke prenositi nizvodno. Zbog toga će postojati vremenska promjena $\partial Q_v / \partial t$, (gdje je Q_v je jednak umnošku gustoće vode i omjera miješanja tinte i vode), koja će biti to efikasnija što su brzina toka i koncentracija tinte veće.

Molekularnom difuzijom, koja je uzrokovana Brownovim gibanjem, promatrana veličina se zbog postojanja gradijenata koncentracije prenosi na molekularnoj skali iz područja veće u područje manje koncentracije. Molekularnu difuziju možemo ilustrirati primjerom u kojem smo tintu izlili u posudu s vodom, koja miruje. Premda je gibanje vode u posudi prostim okom nevidljivo, zbog kinetičke energije molekula, koja je to veća što je temperatura veća, u vodi postoji slučajno Brownovo gibanje, kojim se na molekularnoj skali gibaju i molekule vode i molekule tinte. Stoga će se tinta polagano širiti (difundirati) unutar posude idući od područja veće u područje manje koncentracije. Nakon dosta vremena, boja tekućine u posudi postati će jednolika, što znači da će gradijenti koncentracije tinte nestati. Molekularna difuzija je vrlo polagan proces, pa je u atmosferi najčešće zanemarujemo.

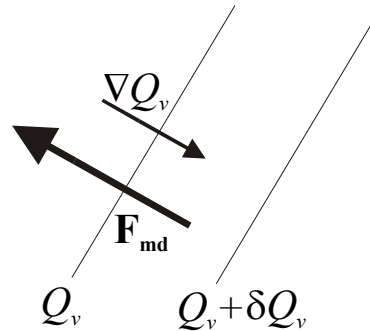
Uvažimo li molekularnu difuziju, opisati ćemo je Fickovim zakonom, koji kaže da je difuzivni fluks skalarnе veličine (\mathbf{F}_{md}) proporcionalan gradijentu količine skalarnе veličine po jedinici volumena i koeficijentu molekularne difuzije κ_d ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$), gdje je količina skalarnе veličine po jedinici volumena Q_v (kg m^{-3})

$$\mathbf{F}_{md} = - \kappa_d \nabla Q_v. \tag{1.7.10}$$

Negativni predznak u Fickovoj jednadžbi (1.7.10) ukazuje na to da se skalarna veličina prenosi iz područja veće u područje manje koncentracije skalarnе veličine (vidi sliku 1.21). U tom slučaju jednadžba sačuvanja skalarnе veličine (1.7.3) prelazi u

$$\partial Q_v / \partial t + \nabla \cdot (\mathbf{F} + \mathbf{F}_{md}) = 0, \quad (1.7.11)$$

gdje je \mathbf{F} advektivni tok prikazan jednažbom (1.7.1), a \mathbf{F}_{md} tok zbog molekularne difuzije, koji je prikazan jednažbom (1.7.10). Budući da je molekularna difuzija vrlo polagan proces, koeficijenti κ_d , koji općenito ovise o stanju fluida, vrlo su mali. Tako je na primjer za vodenu paru u atmosferi pri temperaturi od 8°C $\kappa_d = 2.4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, dok je za sol u oceanu pri temperaturi od 25°C $\kappa_d = 1.5 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.



Slika 1.21. Difuzivni tok skalarnе veličine F_{md} orijentiran je suprotno od gradijenta količine skalarnе veličine po jedinici volumena ∇Q_v .

Turbulentnom difuzijom skalarna veličina prenosi se s jednog na drugo mjesto turbulentnim vrtlozima. Turbulentan tok može prenositi neko svojstvo (npr. toplinu, vlagu, impuls, onečišćujuću tvar itd.) čak i u slučaju kada nema neto transporta mase. Turbulentna difuzija naročito je efikasna u atmosferskom graničnom sloju, kao i u riječnim tokovima. Pri proučavanju turbulencije u atmosferi uobičajeno je sve turbulentne tokove izuzev toka topline podijeliti s gustoćom vlažnog zraka. (Atmosferski granični sloj, koji je turbulentan, dovoljno je tanak da možemo zanemariti postojeće varijacije gustoće zraka). Tok topline podijeli se s umnoškom gustoće vlažnog zraka i specifične topline vlažnog zraka pri konstantnom tlaku. Na taj način dobivamo **kinematičke turbulentne tokove**, koji imaju jedinice onih veličina koje se mogu direktno mjeriti. Tako na primjer, tok impulsa, koji u atmosferi rijetko mjerimo, ima jedinice $\text{N m}^{-2} = \text{kg m}^{-1} \text{ s}^{-2}$ (uočavamo da su to dimenzije tlaka, odnosno napetosti), a kinematički tok impulsa jedinice kvadrata brzine ($\text{m}^2 \text{ s}^{-2}$), koju u atmosferi rutinski mjerimo. Slično, tok topline, koji u atmosferi rijetko mjerimo, ima jedinice $\text{J m}^{-2} \text{ s}^{-1}$, a kinematički tok topline ima dimenzije umnoška temperature i brzine (K m s^{-1}), koje mjerimo redovito.

Kinematički turbulentni tok neke skalarnе veličine jednak je osrednjenom umnošku turbulentnog poremećenja brzine i turbulentnog poremećenja skalarnе veličine, gdje su turbulentna poremećenja definirana jednažbom (1.2.15). Postupak osrednjavanja koji se provodi u tretiranju turbulencije naziva se Reynoldsovim osrednjavanjem, a više o njemu može se saznati u udžbenicima koji se bave turbulencijom (vidi npr. Stull, 1988). Tako je na primjer, vertikalni kinematički turbulentni tok vlage $\overline{w'q'}$, gdje su w' i q' turbulentna poremećenja. Crtica iznad umnoška označava tzv. Reynoldsov srednjak. Slično, vertikalni kinematički turbulentni tok x -komponente impulsa, koji postoji zbog z -komponente

turbulentnog toka impulsa je $\overline{w'u'}$. Kinematički turbulentni tokovi dalje se često aproksimiraju po analogiji na molekularnu difuziju takozvanom **K-teorijom**

$$-\overline{u_i' s'} = K_s \frac{\partial \bar{s}}{\partial x_i}, \quad (1.7.12)$$

gdje je s skalarna veličina, čiji turbulentni kinematički tok želimo odrediti, s' je turbulentno poremećenje, \bar{s} srednje stanje skalarne veličine, a u_i je komponenta brzine u smjeru x_i (najčešće se u obzir uzimaju samo vertikalni turbulentni tokovi). K_s je koeficijent turbulentne difuzije, ili koeficijent turbulentne razmjene ili koeficijent turbulentne disipacije ($\text{m}^2 \text{s}^{-1}$) (eng. *eddy viscosity, eddy diffusivity, eddy transfer coefficient, turbulent transfer coefficient* ili *gradient transfer coefficient*). Da uvažimo i turbulentne tokove u jednadžbi sačuvanja skalarne veličine, fluksevima $\mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{md}}$ u jednadžbi (1.7.11) trebamo dodati članove oblika (1.7.12) za sva tri smjera pomnožene s gustoćom vlažnog zraka. (U slučaju topline kinematički fluks moramo množiti i sa specifičnom toplinom). Budući da je turbulencija karakteristična za atmosferski granični sloj, ovdje je dalje nećemo razmatrati.

Zadaci

- 1.7.1.** Izvedi jednadžbu sačuvanja vodene pare u atmosferi na Lagrangeov način. Zanemari molekularnu difuziju (**Rješenje:** Totalni diferencijal specifične vlažnosti q za materijalni element mora biti jednak nuli. Pomnožimo jednadžbu $Dq/Dt = 0$ s gustoćom vlažnog zraka ρ_m , te rastavimo totalni diferencijal Dq/Dt na lokalnu i advektivnu promjenu. Nakon sređivanja dobivamo jednadžbu sačuvanja vodene pare (1.7.6): $\partial(\rho_m q)/\partial t + \nabla \cdot (\rho_m q \mathbf{v}) = 0$.)
- 1.7.2.** Napiši jednadžbu sačuvanja vodene pare u atmosferi. Osim advekcije uvaži i molekularnu difuziju. (**Rješenje:** $\partial(\rho_m q)/\partial t + \nabla \cdot (\rho_m q \mathbf{v} - \rho_m \kappa_d \nabla q) = 0$, gdje je q specifična vlažnost, a ρ_m je gustoća vlažnog zraka, a κ_d je koeficijent molekularne difuzije vodene pare u atmosferi.)
- 1.7.3.** Napiši jednadžbu sačuvanja onečišćujuće tvari u vlažnom zraku. Uvaži advekciju i molekularnu difuziju. (**Rješenje:** $\partial(\rho_m c)/\partial t + \nabla \cdot (\rho_m c \mathbf{v} - \rho_m \kappa_d \nabla c) = 0$, gdje je c koncentracija onečišćujuće tvari (kg / kg vlažnog zraka), odnosno $Q_v = \rho_m c$, ρ_m je gustoća vlažnog zraka, a κ_d je koeficijent molekularne difuzije onečišćujuće tvari u atmosferi.)
- 1.7.4.** Napiši jednadžbu sačuvanja saliniteta. Uvaži advekciju i molekularnu difuziju. (**Rješenje:** $\partial(\rho_w s)/\partial t + \nabla \cdot (\rho_w s \mathbf{v} - \rho_w \kappa_d \nabla s) = 0$, gdje je ρ_w gustoća morske vode, s je salinitet, a κ_d je koeficijent molekularne difuzije soli u vodi.)